Ostbayerische Technische Hochschule
Amberg-Weiden

BeVorStudium

# Grundlagen der Ingenieurmathematik

*Übungsblätter*

2018/19

Stephan Bach

OTH mind - BMBF Verbundprojekt
**#aufstieggestalten**



GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

AUFSTIEG DURCH BILDUNG
OFFENE HOCHSCHULEN

# Übungsblatt 1: Grundlagen

*Hinweis:*
Geben Sie bei den Aufgaben 2) bis 6) jeweils einen nachvollziehbaren Lösungsweg an.

1) Stellen Sie die folgenden Mengen jeweils in beschreibender Form mit Hilfe von Ungleichungen und Junktoren dar.
   (a) $M = [1; 3[ = \{x | x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 3\}$
   (b) $M = \mathbb{R} \setminus ] - 3; -1] = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \vee x > -1\}$
   (c) $M = [-2; -1] \cup ]0; 1[ = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq -1 \vee 0 < x < 1\}$

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen.
   (a) $|x + 1| < |x - 3|$, $\mathbb{L} = ] - \infty; 1[$
   (b) $\frac{1}{|x|-1} < 1$, $\mathbb{L} = ] - \infty; -2[ \cup ] - 1; 1[ \cup ]2; \infty[$

3) Multiplizieren Sie den folgenden Term mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes aus.

$$(x - 2)^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$$

4) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.
   (a) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n(n + 1)$
   (b) $\binom{n}{n-1} + \binom{n+1}{n} = 2n + 1$

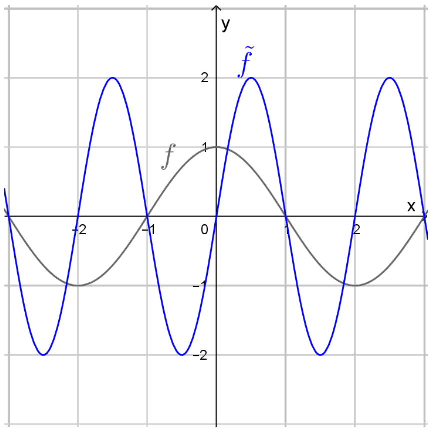
5) Berechnen Sie die folgenden Summen.
   (a) $\sum\limits_{l=1}^{50} (100 - 2l) = 2450$
   (b) $\sum\limits_{l=1}^{100} \sum\limits_{k=1}^{100} (2l + k) = 1\,515\,000$
   (c) $\sum\limits_{l=1}^{10} \sum\limits_{k=1}^{10} lk = 3025$

6) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Beziehung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

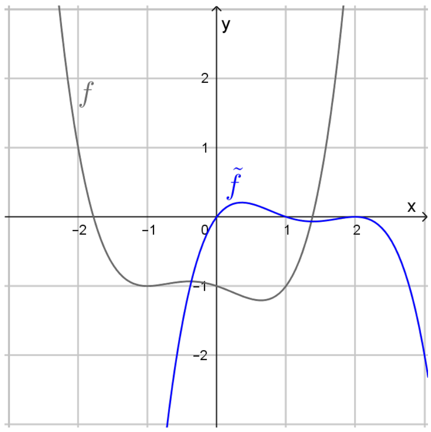
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

# Übungsblatt 2: Grundeigenschaften von Funktionen

1) (a) Gegeben ist der Graph einer Funktion $f$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = 2f(2x-1)$.




(b) Gegeben sind die Graphen zweier Funktionen $f$ und $\tilde{f}$. Geben Sie die Funktionsgleichung von $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = af(bx+c)+d$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ an.




Lösung: $\tilde{f}(x) = -f(-x+1) - 1$

2) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie.

(a) $f(x) = \sin(x^2) + \cos x + 1$ ist gerade

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\sin(3x)(2x+1)$ ist weder gerade noch ungerade

(c) $f(x) = 2\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ist ungerade

3) Gibt es eine Funktion, die sowohl gerade als auch ungerade ist?
Wenn ja, geben Sie ein Beispiel, wenn nein, beweisen Sie. Die konstante Funktion $f(x) = 0$ ist sowohl gerade als auch ungerade.

4) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Umkehrfunktion. Geben Sie neben der Funktionsgleichung jeweils auch Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion an.

   (a) $f(x) = \sqrt{2x-3}\,,\ f^{-1} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to [\frac{3}{2}; \infty[,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

   (b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$ mit $D_f = [-1{,}\infty[$

   $f^{-1} : [-1{,}\infty[ \to [-1{,}\infty[,\ f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x+1} - 1$

   (c) $f(x) = \ln(x^3+1)\,,\ f^{-1} : \mathbb{R} \to [-1; \infty[,\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\mathrm{e}^x - 1}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{1 - \mathrm{e}^x}, & x < 0 \end{cases}$

5) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 1 - x^2$. Bestimmen Sie für die Funktionen $f \circ g \circ h$ und $g \circ h \circ f$ jeweils die Funktionsgleichung und den maximalen Definitionsbereich.
Lösung:
$(f \circ g \circ h)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ D_{f\circ g\circ h} = ]-1; 1[$
$(g \circ h \circ f)(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}},\ D_{g\circ h\circ f} = \mathbb{R}\backslash]-1; 1[$

6) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x}}{3\,\mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1}{x^4 - 1} = 0$

   (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = -1$

# Übungsblatt 3: Elementare Funktionen

1) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x^2+x} & \text{für } x > 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

Die Funktion ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Die Funktion ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{2\sin x} & \text{für } x \neq 0 \\ \frac{\pi}{3} & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Die Funktion ist nicht stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

2) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+a^2}-a}{x} & \text{für } x > 0 \\ b & \text{für } x = 0 \\ -2\arctan(\frac{1}{x}) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit zwei Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a$ und $b$ so, dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.
Mit $a = \frac{1}{2\pi}$ und $b = \pi$ ist $f$ an $x_0 = 0$ und damit auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

3) Gegeben ist eine Polynomfunktion $f$ mit

$$f(x) = x^5 - 7x^4 + \frac{45}{4}x^3 + 10x^2 - 31x + 12$$

Die Funktion hat eine doppelte Nullstelle bei $x_1 = 2$ und eine einfache Nullstelle bei $x_2 = 4$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen mit Hilfe des Horner-Schemas.
$f(x) = (x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})(x - 2)^2(x - 4)$.
Für die Menge $N$ der Nullstellen von $f$ gilt somit $N = \{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2; 4\}$

4) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(a) $\ln|x| + 2 = \ln(x^2), \mathbb{L} = \{-\mathrm{e}^2; \mathrm{e}^2\}$

(b) $x^2 = x^x, \mathbb{L} = \{1; 2\}$

(c) $2^{2x+3} - 3^{3x+2} = 0, \mathbb{L} = \{\frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{2\ln 2 - 3\ln 3}\}$

5) Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen im Intervall $I$.

(a) $\sin x + 2\cos x = 1$, $I = [0; 2\pi]$, $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}; 2\pi - \arcsin(\frac{3}{5})\} = \{\frac{\pi}{2}; 2\pi - \arccos(\frac{4}{5})\}$

(b) $\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$, $I = [0; \pi]$, $\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{3}; \frac{2}{3}\pi\}$

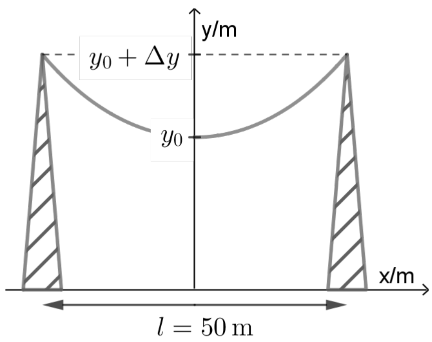
(c) $\sin(2x)\tan(x^2) = 0$, $I = [0; \pi]$, $\mathbb{L} = \{0; \frac{\pi}{2}; \sqrt{\pi}; \sqrt{2\pi}; \sqrt{3\pi}; \pi\}$

# Übungsblatt 5: Differentialrechnung I

1) Zeigen Sie, dass die folgenden Zusammenhänge gelten.
   (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
   (b) $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

2) Die Form eines durchhängenden Seils werde durch die Gleichung $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ beschrieben. In der Mitte habe das Seil die Höhe $y_0 = 15\,\mathrm{m}$.

   Bestimmen Sie seinen Durchhang $\Delta y$, wenn die Aufhängungen den Abstand $l = 50\,\mathrm{m}$ haben.




   $\Delta y = f(25\,\mathrm{m}) - f(0) = 15\,\mathrm{m} \cdot \left(\cosh\left(\frac{5}{3}\right) - 1\right) = 26{,}1\,\mathrm{m}$

3) Bestimmen Sie durch lineare Näherungen Näherungswerte für die unten angegebenen Funktionswerte. Wählen Sie jeweils eine geeignete Stützstelle $x_0$, an der Sie den Funktionswert bereits kennen.
   (a) $\sin 0{,}5$
   Mit $x_0 = \frac{\pi}{6}$ erhält man $\sin 0{,}5 \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(0{,}5 - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}48$
   (b) $\arctan 2$
   Mit $x_0 = \sqrt{3}$ erhält man $\arctan 2 \approx \arctan\sqrt{3} + \frac{1}{1+3}(2-\sqrt{3}) = 1{,}11$
   (c) $\ln 2$
   Mit $x_0 = \mathrm{e}$ erhält man $\ln 2 \approx \ln \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}(2 - \mathrm{e}) = 0{,}74$

4) Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen jeweils an der Stelle $x_0$ differenzierbar sind.
   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$
   Da $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -1 \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -2$ ist $f$ an $x_0$ nicht differenzierbar.
   (b) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{für } x < 1 \\ \mathrm{e}x + 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$
   Da $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \mathrm{e} \neq \lim\limits_{x \to 1+} f(x) = \mathrm{e} + 1$ ist $f$ an $x_0$ nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar.
   (c) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$ existiert nicht, daher ist $f$ an $x_0$ nicht differenzierbar.

5) Bestimmen die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 2^x + x^2,\ f'(x) = 2^x \ln 2 + 2x$

(b) $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^2,\ f'(x) = 2(x^2 + 3x + 1)(2x + 3)$

(c) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x,\ f'(x) = 0$

(d) $f(x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x,\ f'(x) = 4 \sinh x \cosh x$

(e) $f(x) = \sin x \cos x,\ f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$

(f) $f(x) = \frac{\arctan x}{x^2+1},\ f'(x) = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2}$

(g) $f(x) = \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right),\ f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, & x < 0 \end{cases}$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right),\ f'(x) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) + \cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})\right)$

(i) $f(x) = \sqrt{\sin x + 1},\ f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x + 1}}$

(j) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

(k) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}\ \log_2(x^2+1),\ f'(x) = \frac{2x}{\ln 2 \sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\left(\frac{1}{3}\ln(x^2+1) + 1\right)$

*Hinweis:* Quotienten können Sie unter Ausnutzung des entsprechenden Potenzgesetzes auch als Produkte schreiben: $\frac{a}{b} = ab^{-1}$

# Übungsblatt 6: Differentialrechnung II

1) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

   (a) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x-1}$

   (c) $f(x) = 2^{(x+1)\sqrt{x}\ln x}$

   (d) $f(x) = \frac{\sin(2x^2)}{\sqrt{x+1}\cos x}$

2) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{\cos x}$. Bestimmen Sie $g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x)$.
Vereinfachen Sie den Funktionsterm von $g$ soweit wie möglich und bestimmen Sie ohne Taschenrechner $g(-\sqrt{2})$.

3) Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion $f$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $f'$.

4) Berechnen Sie, falls diese existieren, die folgenden Grenzwerte.

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$ (L'H., Typ „$\frac{0}{0}$“)

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arsinh} x}{\ln x} = 1$ (L'H., Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“+ Kürzen)

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 \sin x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ L'H. nicht möglich, Grenzwert existiert nicht

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$ (L'H., Typ „$\infty - \infty$“auf Typ „$\frac{0}{0}$“ bringen)

   (e) $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} (\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2\mathrm{e}}x\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$ (L'H., Typ „$1^\infty$“ zunächst auf Typ „$0 \cdot \infty$ “und dann „$\frac{0}{0}$“ bringen)

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2\sin x}{\cos x-3x} = -\frac{1}{3}$ (Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“ aber L'H. funktioniert nicht)

5) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Funktion $f$ mit $D_f = \mathbb{R}$ mit den aufgeführten Eigenschaften.

   (a) $f$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

   (b) $f$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ zwar einmal aber nicht zweimal differenzierbar.

   (c) $f$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen Wendepunkt und es gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$

(d) $f$ hat an der Stelle $x_0 = 1$ ein lokales Maximum und es gilt $f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$.

(e) $f$ ist eine gerade Funktion, die bei $x_0 = 0$ *kein* lokales Extremum hat.

(f) Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert, aber die Funktion $f$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

6) Gegeben ist die Funktion $f$ mit $D_f = [0, 2\pi]$ und $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{3-x} \sin x$.

(a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion $f$.

(b) Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f$.

(c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion und bestimmen Sie mögliche Wendestellen.

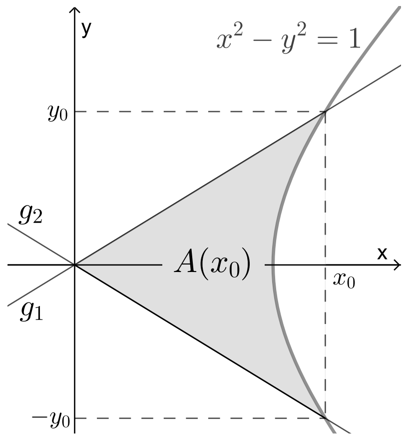
# Übungsblatt 7: Integralrechnung

1) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ das bestimmte Riemannsche Integral $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(\tilde{x}_k)\Delta x_k$ mit $x_0 = 0$ und $x_n = 3$.

   *Hinweis*:
   Wählen Sie $\Delta x_k = \frac{3}{n} = \Delta x$, $x_k = k\Delta x = \frac{3k}{n}$ und $\tilde{x}_k = x_k = \frac{3k}{n}$.
   Sie dürfen außerdem verwenden, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2) Gegeben ist die Einheitshyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ sowie die Geraden $g_1$ und $g_2$ mit $g_1(x) = \frac{y_0}{x_0}x$ und $g_2(x) = -\frac{y_0}{x_0}x$, $x_0 \geq 1$.
   $A(x_0)$ sei die Fläche des Hyperbelsektors im ersten und vierten Quadranten, der von den beiden Geraden und dem rechten Hyperbelast begrenzt wird.

   Berechnen Sie $A'(x)$.




   *Hinweis:*
   Lösen Sie die Aufgabe, **ohne** auf Theorie zu Hyperbel- oder Areafunktionen, wie Ableitungsfunktionen, Schreibweise durch Exponential- bzw. Logarithmusfunktionen etc., zurückzugreifen!

3) Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

   (a) $\int \sin x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\,\mathrm{e}^x + c$ mit partieller Integration
   (b) $\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x \;= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + c$, Substitution
   (c) $\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \;= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(x^2 - x + \frac{1}{2}) + c$ mit partieller Integration
   (d) $\int \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x \;= 2\ln(\,\mathrm{e}^x + 1) - x + c$ mit Substitution und Partialbruchzerlegung
   (e) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;= \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$ mit Substitution
   (f) $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2-x-4}{x^3+3x^2-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c$
   (g) $\int \frac{x+1}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x \;= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + c$, logarithmische Integration und Substitution

4) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2$

(c) $\int\limits_{\arctan(-\sqrt{2})}^{\arctan\sqrt{2}} x^3 \cos^2 x \,\mathrm{d}x = 0$

(d) $\int\limits_{0}^{2\pi} |\sin(x) + 0{,}5| \,\mathrm{d}x \approx 4{,}51$

5) Bestimmen Sie, falls diese existieren, die folgenden uneigentlichen Integrale.

(a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = 1$

(b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan x \,\mathrm{d}x$ , divergent

(c) $\int\limits_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

(d) $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x$ , divergent

# Übungsblatt 9: Vektoren

1) (a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{Lösung: } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

(b) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Lösung: } c = -2$$

(c) Bestimmen Sie die Richtungswinkel des Vektors $\vec{a}$ mit den Koordinatenachsen.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{Lösung: } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$$

2) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

Stellen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

Lösung: $\vec{v} = 11\vec{a} - 7\vec{b}$

3) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Fläche des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms.
Lösung: $A = 4$

(b) Zusammen mit einem Vektor $\vec{c}$ spannen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Spat mit dem Volumen $V = 8$ auf. Bestimmen Sie einen möglichen Vektor $\vec{c}$ mit $|\vec{c}| = 4$.

Lösung: z.B. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, dabei muss $-c_2 + c_3 = 2\sqrt{2}$ gelten

4) Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zerlegen Sie den Vektor $\vec{b}$ so in eine Komponente $\vec{b}_{\parallel \vec{a}}$ parallel zu $\vec{a}$ und eine Komponente $\vec{b}_{\perp \vec{a}}$ senkrecht zu $\vec{a}$, so dass gilt $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel \vec{a}} + \vec{b}_{\perp \vec{a}}$.

Lösung: $\vec{b}_{\parallel \vec{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_{\perp \vec{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$ mit

$$E_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \vec{r} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad E_2 : \ x + y + z = 1$$

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Ebenen sowie die Gleichung der Schnittgeraden.

Lösung: $\alpha = 70{,}5°$, $g : \ \vec{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6) Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ heißen windschief, wenn Sie sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

(a) Zeigen Sie, dass für den Abstand $d$ zwei windschiefer Geraden $g_1 : \ \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$ und $g_2 : \ \vec{r} = \vec{r}_2 + \mu \vec{b}$ gilt

$$d = \frac{|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

*Hinweis:*
Verschiebt man die Gerade $g_2$ parallel soweit, dass sie $g_1$ schneidet, so erhält man eine Gerade $\tilde{g}_2$. Damit liegen $g_1$ und $\tilde{g}_2$ in einer gemeinsamen Ebene $E$. Der Abstand dieser Ebene zu $g_2$ ist genauso groß wie der Abstand der beiden windschiefen Geraden.

(b) Gegeben sind die beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ mit

$$g_1: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $g_1$ und $g_2$ windschief sind und bestimmen Sie ihren Abstand.

Lösung: $d = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3{,}58$

# Übungsblatt 10: Lineare Algebra

1) Gegeben sind die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Matrixprodukte sind definiert?

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B},\ \mathbf{A}^\top\,\mathbf{B},\ \mathbf{A}\,\mathbf{B}^\top,\ \mathbf{A}^\top\,\mathbf{B}^\top,\ \mathbf{B}\,\mathbf{A},\ \mathbf{B}^\top\,\mathbf{A},\ \mathbf{B}\,\mathbf{A}^\top,\ \mathbf{B}^\top\,\mathbf{A}^\top$$

Berechnen Sie alle definierten Produkte.

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^\top\,\mathbf{B}^\top = (\,\mathbf{B}\,\mathbf{A})^\top = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^\top\,\mathbf{A}^\top = (\,\mathbf{A}\,\mathbf{B})^\top = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Gegeben sind die beiden Zeilenmatrizen $\mathbf{a} = (1, 3, 0, 2)$ und $\mathbf{b} = (-1, 2, 1, -1)$.
Bestimmen Sie $\mathbf{a}\,\mathbf{b}^\top$ und $\mathbf{a}^\top\,\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}^\top = 3, \quad \mathbf{a}^\top\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 52$, $\det \mathbf{B} = -3$, $\det \mathbf{C} = 0$

4) Bestimmen Sie für die folgenden linearen Gleichungssysteme jeweils die Lösungsmenge.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 6 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{(3-2t, -4, t, 3)^\top | t \in \mathbb{R})\}$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & & & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{(2, -1, 3, -2)^\top\}$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{(2+s+2t, 1+s-t, s, t)^\top | s, t \in \mathbb{R}\}$

5) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & ax_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & ax_4 & = & 4 \end{array}$$

Für welche Werte von $a$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?

Aus $\det \mathbf{A} = -a^4 + 3a^2 - 2a \neq 0$ folgt $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$

6) Gegeben sei eine (2,2)-Matrix $\mathbf{A}$ sowie die (2,2)-Einheitsmatrix $\mathbf{E}$.

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{E}$ zwei Matrizen $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ mit

$$\mathbf{X}_i^2 + \mathbf{X}_i\,\mathbf{A} = \mathbf{E} - \mathbf{A}(2\,\mathbf{E} + \mathbf{X}_i)$$

Zeigen Sie an einem Beispiel für $\mathbf{A}$, dass es weitere Matrizen $\mathbf{X}_i$ geben kann, welche die obige Gleichung erfüllen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}\,\mathbf{A} &= \mathbf{E} - \mathbf{A}(2\,\mathbf{E} + \mathbf{X}) \\
\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} &= \mathbf{E} - 2\,\mathbf{A} \\
\mathbf{X}^2 + \mathbf{X}\,\mathbf{A} + \mathbf{A}\,\mathbf{X} + \mathbf{A}^2 &= \mathbf{E} - 2\,\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \\
(\mathbf{X} + \mathbf{A})^2 &= (\mathbf{E} - \mathbf{A})^2
\end{aligned}$$

Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A}$ erfüllen daher $\mathbf{X}_1 = -\mathbf{E}$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{A}$ die obige Gleichung.

Sei nun $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}$. Dann ist $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^2 = \mathbf{0}^2 = \mathbf{0}$. Andererseits ist mit $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ auch $\mathbf{C}^2 = \mathbf{0}$. Daher ist für $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ die obige Gleichung auch für $\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \notin \{-\mathbf{E}, \mathbf{E} - 2\,\mathbf{A}\}$ erfüllt.

**Impressum**


| | |
|---|---|
| Autor: | Stephan Bach |
| Herausgegeben durch: | Teilprojekt #aufstieggestalten der OTH Amberg-Weiden aus dem Verbundprojekt „OTH mind“ mit der OTH Regensburg des Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“ |
| Kontakt: | Hetzenrichter Weg 15, 92637 Weiden in der Oberpfalz<br>othmind@oth-aw.de<br>www.oth-aw.de/oth-mind |
| Copyright: | Dieses Kursmaterial ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0). Bei einer Weitergabe soll der Name des Urhebers wie folgt genannt werden: „Stephan Bach, OTH mind #aufstieggestalten, OTH Amberg-Weiden“. |
| Hinweis: | Diese Publikation wurde im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“ erstellt. Die in dieser Publikation dargelegten Inhalte liegen in der alleinigen Verantwortung des Autors. |