Ostbayerische Technische Hochschule
Amberg-Weiden

BeVorStudium

Modul Mathematik II

Übungsblätter

2018

Dr. Michael Seidl

OTH mind - BMBF Verbundprojekt
#aufstieggestalten

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

AUFSTIEG DURCH BILDUNG
OFFENE HOCHSCHULEN

Modul Mathematik II (BeVorStudium): Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (neue Version vom 21. 5. 2018)

Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion mit dem Term

$$f(x) \;=\; \sqrt{9 \,-\, (x-4)^2} \,-\, 1.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Graphen G_g der Funktion $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$. Lesen Sie jeweils die Definitions- und Wertemengen D_g, W_g bzw. D_f und W_f ab.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen mithilfe einer Wertetabelle.

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(b) $f(x) = x^2 - 2$.

(c) $f(x) = 4 - x^2$.

(d) $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Aufgabe 3

Bringen Sie folgende Funktionsterme auf Scheitelpunkt-Form.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

(b) $f(x) = 4 - x^2$.

(c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

(d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils den Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ jener quadratischen Funktion, deren Graph durch die angegebenen Punkte verläuft.

(a) $A(2|1)$, Scheitelpunkt $S(1|5)$.

(b) $A(2|1)$, $B(3|-1)$, $C(4|1)$.

(c) $A(2|1)$, $B(3|-1)$, $C(4|0)$.

(d) $A(2|1)$, $B(3|-1)$, $C(4|-3)$.

Aufgabe 5

Gegeben sind die Punkte $V(1|1)$ und $W(2|4)$ in der xy-Ebene.

(a) Finden Sie **zwei verschiedene** quadratische Funktionen, deren Graphen jeweils durch **beide** Punkte verläuft.

(b) Unter welcher **allgemeinen** Bedingung an die Koeffizienten a, b und c des Terms

$$f(x) \;=\; a\,x^2 \,+\, b\,x \,+\, c$$

verläuft der Graph G_f durch diese Punkte?

Aufgabe 6 (neue Version vom 21. 5. 2018)

Zwei Eckpunkte des Rechtecks $ABCD$ seien $A(-1|0)$ und $B(x|0)$, wobei $-1 \leq x \leq 4$. Der dritte Eckpunkt C liege auf der Gerade PQ durch die Punkte $P(0|2)$ und $Q(4|0)$.

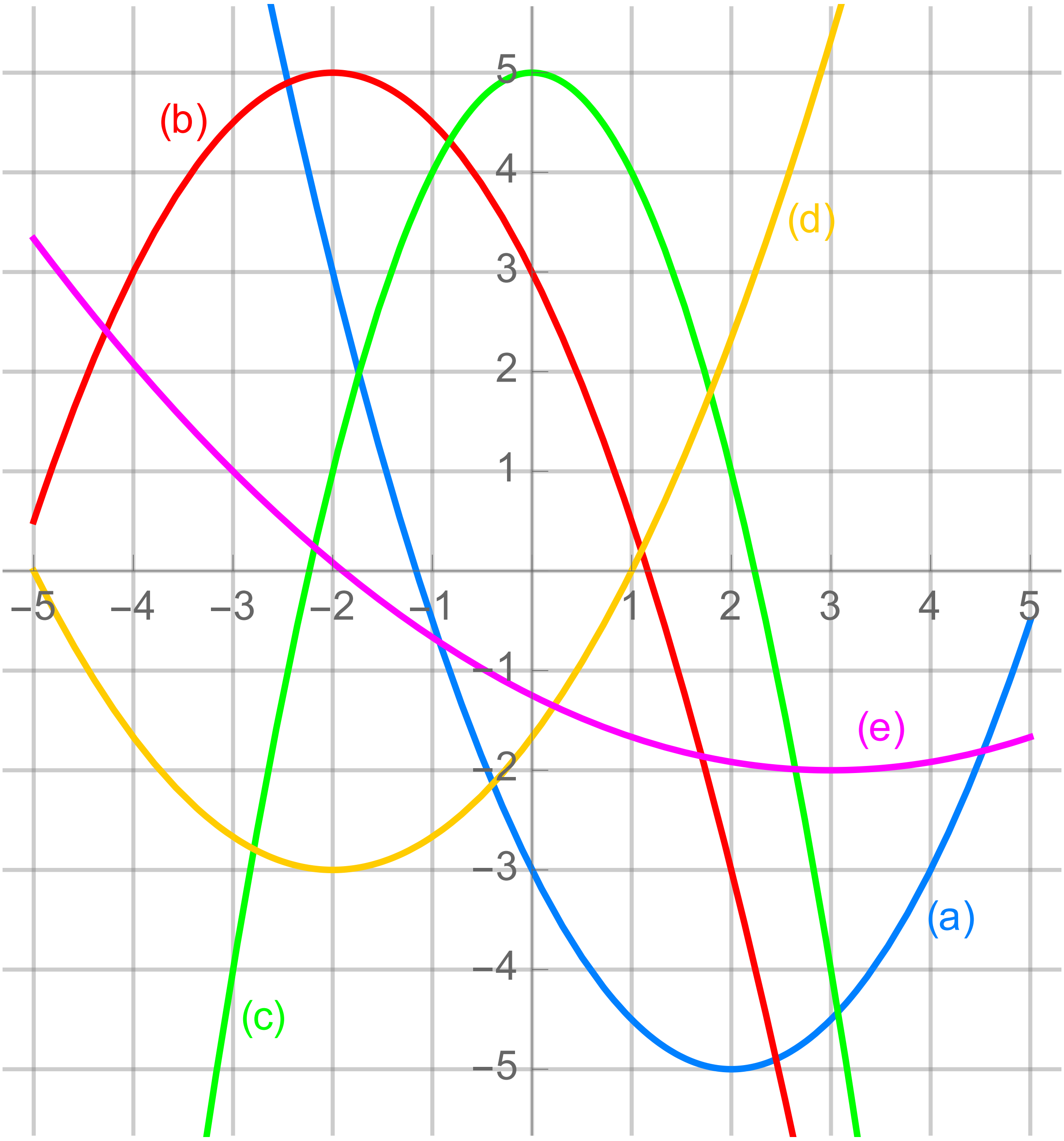
(a) Zeichnen Sie die Gerade PQ und, jeweils für $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, das Rechteck $ABCD$.

(b) Wie hängt die y-Koordinate $h(x)$ des dritten Eckpunkts $C\big(x \,\big|\, h(x)\big)$ von x ab?

(c) Für welchen Wert x wird der Flächeninhalt $f(x)$ des Rechtecks $ABCD$ maximal?

Aufgabe 7

Die Abbildung zeigt die Graphen verschiedener quadratischer Funktionen.
Bestimmen Sie jeweils, so genau wie möglich, den Funktionsterm $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Modul Mathematik II (BeVorStudium): Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Berechnen Sie, jeweils für die Fälle (i) und (ii),

(i)	$a = 2$	$b = 3$	$c = 4$	$d = 5$
(ii)	$a = -2$	$b = 3$	$c = 4$	$d = -5$

alle 16 Terme aus folgender Tabelle,

	A	B	C	D
1	$-a + b - c + d$	$-a + (b - c) + d$	$-(a + b) - c + d$	$(-a + b) - c + d$
2	$-ab$	$(-a)b$	$(-a)(-b)$	$-a(-b)$
3	$-a^2$	$(-a)^2$	$-ab$	$-a + b$
4	$-a^2bc + d^2$	$-a^2b - cd^2$	$a - b^2c - d$	$abcd^2$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Potenzfunktionen auf Symmetrie.
Geben Sie jeweils das Verhalten für $x \to \pm\infty$ an.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^6$.

(b) $f(x) = -5\,x^3$.

(c) $f(x) = \frac{x^7}{8}$.

(d) $f(x) = -5\,x^4$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Symmetrie.
Geben Sie jeweils das Verhalten für $x \to \pm\infty$ an.

(a) $f(x) = -x^6 - 8\,x^4 + 7\,x^2 - 2$.

(b) $f(x) = 5\,x^5 - 8\,x^3 + 7\,x^2 - 2$.

(c) $f(x) = \frac{13}{8}x^7 - 8\,x^5 + 7\,x^3 - 2$.

(d) $f(x) = -5\frac{x^5}{4} - 8\,x^3 + 7\,x$.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Nullstellen und deren Vielfachheiten. Stellen Sie jeweils eine Vorzeichentabelle auf und skizzieren Sie den Graphen G_f.

(a) $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 6\,x + 8$.

(b) $f(x) = -x^3 + 4\,x^2 - x - 6$.

(c) $f(x) = x^3 - 3\,x - 2$.

(d) $f(x) = x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 12$.

(e) $f(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 9\,x - 10$.

Hinweis: Berechnen Sie jeweils $f(1)$, $f(-1)$ und führen Sie eine Polynomdivision durch.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Nullstellen und deren Vielfachheiten. Stellen Sie jeweils eine Vorzeichentabelle auf und skizzieren Sie den Graphen G_f.

(a) $f(x) = x^4 - 13\,x^2 + 36.$

(b) $f(x) = x^4 - 16.$

Aufgabe 6

Die Abbildung zeigt die Graphen der folgenden ganzrationalen Funktionen.

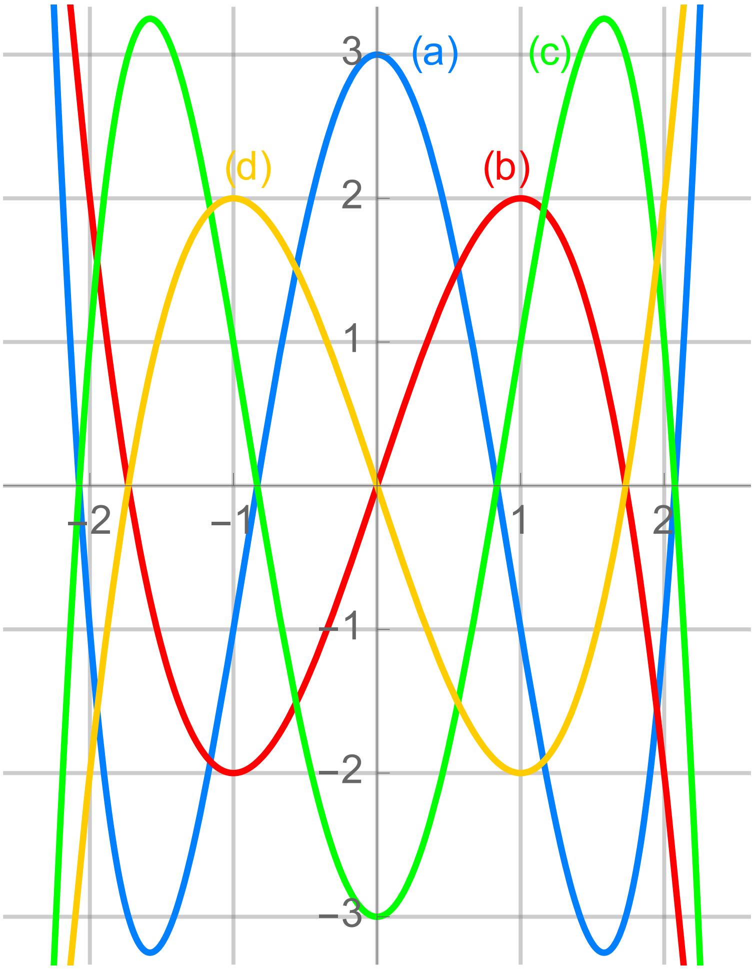
(1) $f(x) = x^3 - 3\,x.$

(2) $f(x) = 3\,x - x^3.$

(3) $f(x) = x^4 - 5\,x^2 + 3.$

(4) $f(x) = 5\,x^2 - x^4 - 3.$

Welcher der Terme (1–4) gehört jeweils zu welchem der Graphen (a–d)?



Aufgabe 7

Für die folgenden Funktionen kennen Sie bereits Definitionsmengen und Graphen. Entscheiden Sie damit, ob es sich um **ganzrationale** Funktionen handelt.

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x - 1, \qquad g(x) = \sqrt{16 - x^2}, \qquad h(x) = 16 - x^2, \qquad k(x) = \frac{4}{1 + x^2}.$$

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x-4}$ mit $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

(a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $0 \leq x \leq 7$ und skizzieren Sie G_f.

(b) Verifizieren Sie am Graphen, daß gilt: $\lim\limits_{x\to 4+0} = +\infty$.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $f(x) > 1000$ für alle x mit $x > 4$ aber $x < 4.003$.

(d) Wie muß man $\delta > 0$ wählen, sodaß gilt: $f(x) > 50\,000$ für alle $x > 4$ mit $x < 4+\delta$?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen zuerst die Nullstellen von Zähler und Nenner. Bestimmen Sie sodann die Nullstellen und Polstellen der jeweiligen Funktion f. Geben Sie jeweils die Asymptoten des Graphen G_f an und skizzieren Sie diesen.

(a) $f(x) \;=\; \dfrac{x^2}{x^2-4}$. (b) $f(x) \;=\; \dfrac{x^2+x-6}{x+2}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei eine gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$.

(a) Ist jede Nullstelle von $q(x)$ eine Polstelle von f?

(b) Ist jede Nullstelle von $p(x)$ eine Nullstelle von f?

(c) Kann eine Nullstelle/Polstelle von f zugleich Definitionslücke von f sein?

Aufgabe 4

Lesen Sie vom Term

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}x \;-\; 2 \;+\; \frac{2}{2x-1}$$

der gebrochen-rationalen Funktion f alle Asymptoten ab, und skizzieren Sie den Graphen G_f. Bringen Sie den Term auf die Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit zwei Polynomen p und q.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = x + \frac{3}{x} - 2$ eine gebrochen-rationale Funktion ist: Geben Sie die Polynome $p(x)$ und $q(x)$ der Darstellung $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ an.
Bestimmen Sie D_f, sowie alle Nullstellen, Polstellen und Asymptoten von f.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Terme zweier verschiedener gebrochen-rationaler Funktionen f und g, welche jeweils die beiden Asymptoten $y = x - 2$ und $x = -2$ haben.

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die Funktion f mit dem Term

$$f(x) \;=\; \frac{16-4x^2}{8x^2+5}$$

auf Symmetrie. Bestimmen Sie alle Asymptoten, und skizzieren Sie den Graphen G_f.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie alle Nullstellen, Polstellen und Asymptoten der Funktion f mit dem Term

$$f(x) \;=\; \frac{x^3 \,-\, 2x^2 \,-\, x \,+\, 2}{x^2 \,+\, 2x}.$$

Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle und skizzieren Sie G_f.

Aufgabe 9

Bestimmen Sie für die gebrochen-rationale Funktion f mit dem Term

$$f(x) \;=\; \frac{p(x)}{q(x)} \;=\; \frac{(x+5)(x+2)(x-4)(x-7)^4\,(x^2-2x+2)}{(x+3)(x+2)(x-4)^2(x-6)(x-7)^3\,(x^4+x^2+1)}$$

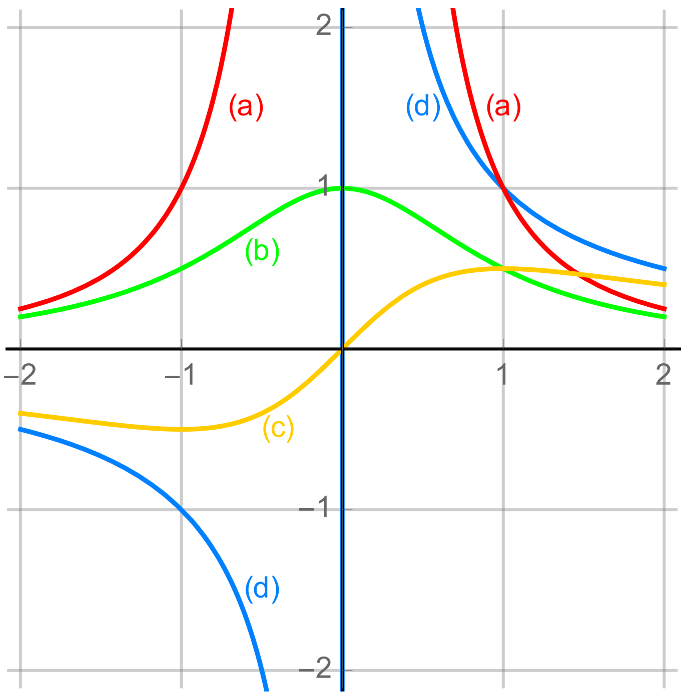
die Mengen N, P und H der Nullstellen, Polstellen bzw. der hebbaren Definitionslücken. Erstellen Sie eine Vorzeichentabelle. Versuchen Sie, den Graphen G_f zu skizzieren.

Aufgabe 10

Ordnen Sie die Graphen der Abbildung den folgenden Funktionen zu.

(1) $f(x) \;=\; \dfrac{1}{x}.$ (2) $f(x) \;=\; \dfrac{1}{x^2}.$

(3) $f(x) \;=\; \dfrac{1}{x^2+1}.$ (4) $f(x) \;=\; \dfrac{x}{x^2+1}.$



Aufgabe 1

Berechnen Sie die Zahlenwerte folgender Potenzen.

$$8^{2/3}, \quad 16^{3/4}, \quad 25^{5/2}, \quad 243^{2/5}, \quad 0.008^{2/3}, \quad 125^{-2/3}, \quad 0.027^{-5/3}.$$

Aufgabe 2 ("Nenner rational machen")

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $x \cdot \sqrt[n]{k}$, mit $x \in \mathbb{Q}$ und $n, k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{5\sqrt{6}}, \quad \frac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{6}}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{2}{15\sqrt[3]{2}},$$

$$2^{3/2}, \quad 2^{5/2}, \quad 25^{5/4}, \quad 243^{7/5}, \quad 2^{-1/2}, \quad \frac{2}{2^{5/2}}, \quad 25^{-1/4}, \quad \frac{5}{25^{1/4}}.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Logarithmen.

(a) $\log_2 8, \quad \log_2 2, \quad \log_2 1, \quad \log_2 \frac{1}{2}, \quad \log_2 0.125.$

(b) $\log_3 27, \quad \log_5 125, \quad \log_7 49, \quad \log_4 64, \quad \log_5 0.04, \quad \log_7 343, \quad \log_4 \frac{1}{2}.$

(c) $\log_3 \frac{1}{9}, \quad \log_5 \sqrt{5}, \quad \log_5 \sqrt{125}, \quad \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \log_2 \frac{1}{\sqrt{8}}.$

(d) (NEU!) $\log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{100}}, \quad \log_3 \sqrt[4]{27}, \quad \log_2 \sqrt[3]{0.25}, \quad \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{128}}.$

Aufgabe 4

Geben Sie jeweils eine ganze Zahl n an, sodaß gilt: $n < L < n + 1$.

(a) $L = \log_{10} 623, \quad L = \log_{10} 4000, \quad L = \log_{10} 0.000072, \quad L = \log_{10}(6.23 \cdot 10^{23}).$

(b) $L = \log_2 623, \quad L = \log_2 4000, \quad L = \log_2 0.000072, \quad L = \log_2(6.23 \cdot 10^{23}).$

Aufgabe 5

Drücken Sie folgende Logarithmen durch $\log_{10} 5$ aus.

$$\log_{10} 625, \quad \log_{10} 50, \quad \log_{10} 500, \quad \log_{10} \sqrt[3]{25}, \quad \log_{10} \frac{1}{25}, \quad \log_{10} \frac{1}{\sqrt{125}}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sei der Wert $\log_{10} 67 = 1.826$. Berechnen Sie damit folgende Logarithmen.

$$\log_{10} 6.7, \quad \log_{10} 670, \quad \log_{10} 0.00067, \quad \log_{10} 67000, \quad \log_{10} \frac{1}{67}, \quad \log_{10}(6.7 \cdot 10^{-23}).$$

Aufgabe 7

Erstellen Sie mit den Werten $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ eine möglichst ausführliche Wertetabelle der Funktion

$$f(x) = \log_{10} x$$

für $x \in [0.3, 10]$, ohne die LOG-Taste des Taschenrechners zu benutzen.
Zeichnen Sie den Graphen G_f und lesen Sie daraus einen Wert für $\sqrt{10}$ ab.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen.

(a) $\log_7(2x + 5) = 2$.

(b) $\log_2(x^2 - 6x + 37) = 5$.

(c) $\log_2(4 - x^2) = 3$.

(d) $2^{6-x} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 9

Wir betrachten die **Wurzelfunktion**,

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad D_f = \mathbb{R}_0^+.$$

(a) Welches ist der Wertebereich W_f? Erstellen Sie für $x \in \{0, 0.25, 1, 2.25, 4, 6.25, 9\}$ eine Wertetabelle, und zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $x \in [0, 10]$.

(b) Läßt sich diese Funktion als **Potenzfunktion** interpretieren?
Vergleichen Sie mit den Graphen der bereits bekannten Potenzfunktionen.

(c) Lesen Sie aus G_f Näherungswerte für $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10}$ ab.

(d) Beschreiben Sie die **Umkehrfunktion** $\bar{f}(x)$.

Modul Mathematik II (BeVorStudium): Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Die Funktion f wird **abschnittsweise** definiert durch

$$f(x) \;=\; \left\{ \begin{array}{cc} 2^x & (x < 0) \\ ax + b & (0 \le x \le 1) \\ \log_2 x & (x > 1) \end{array} \right\}.$$

(a) Zeichnen Sie für den Fall $a = -2$, $b = 1$ den Graphen G_f für $-2 \le x \le 4$.

(b) Für welche Werte von a und b ist f eine **stetige** Funktion?

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3$.

(a) Versuchen Sie aus einer graphischen Darstellung möglichst genau die Steigung $m_T^{(x_0)}$ der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 = 1$ zu bestimmen.

(b) Berechnen Sie den exakten Wert dieser Steigung als Grenzwert,

$$m_T^{(x_0=1)} \;=\; \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie jeweils die Steigung der Tangente,

$$m_T^{(x_0)} \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \;-\; f(x_0)}{x \;-\; x_0},$$

im Punkt $(x_0|f(x_0))$ des Graphen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x^2$.

(b) $f(x) = x^3$.

(c) $f(x) = \sqrt{x} \qquad (x \ge 0)$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \ne 0)$.

Was folgt jeweils für die Ableitung $f'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$?
Zeigen Sie, daß jeweils ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Formel vorliegt,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n \;=\; n\, x^{n-1}.$$

Aufgabe 4

In der Vorlesung haben wir den Graphen G_f der folgenden Funktion betrachtet,

$$f(x) \;=\; -\frac{1}{6} x^3 \;+\; \frac{1}{2} x^2 \;+\; \frac{3}{2} x.$$

(a) An welchen Punkten $(x_0|f(x_0))$ von G_f liegen lokale Maxima/Minima von f?

(b) Wie kann man diese Extrema x_0 aus der Ableitung $f'(x)$ berechnen ?

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 8$.

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 35x - 11$.

(c) $f(x) = x + \frac{3}{x} - 2 \qquad (x \neq 0)$.

(d) $f(x) = x - \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$.

Skizzieren Sie an Hand einer Wertetabelle jeweils den Graphen $G_{f'}$.
Welche Stellen x_0 sind lokale Maxima bzw. Minima von $f(x)$?

Aufgabe 6

Eine zylindrische Dose (Radius r, Höhe h) mit ($N = 2$) oder ohne ($N = 1$) Deckel hat die Fläche

$$A \;=\; N\,\pi r^2 \;+\; 2\pi r\,h.$$

Wie sind r und h bei vorgegebenem Wert von A zu wählen, damit das Volumen $V = \pi r^2 h$ maximal wird ?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen jeweils (i) nach der **Produktregel** und (ii) nach vorherigem Ausmultiplizieren.

(a) $f(x) = (2x - 3)(5x + 6)$.

(b) $f(x) = \sqrt{x}(3x + 4)$.

(c) $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{x})(x + 2)$.

Aufgabe 8

Benutzen Sie die **Produktregel**, um aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$ die allgemeine Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^n \;=\; n\,x^{n-1}$$

für die Fälle $n = 2, 3, 4, ...$ zu gewinnen.

Aufgabe 9

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen nach der **Quotientenregel**.

(a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

(b) $g(x) = \frac{2}{1-x}$.

(c) $h(x) = \frac{6-4x}{1-x}$.

Interpretation ?

Aufgabe 10

Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen nach der **Kettenregel**.

(a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

(b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

(d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Versuchen Sie jeweils, die Graphen G_f und $G_{f'}$ zu skizzieren.

Aufgabe 1

Für beliebige Werte des Winkels α gilt nach dem Satz von Pythagoras allgemein

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Berechnen Sie daraus die exakten Werte von $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ für $\alpha \in \{30°, 45°, 60°\}$.
Hinweis: Beachten Sie Symmetrien der entsprechenden rechtwinkligen Dreiecke.

Aufgabe 2

Geben Sie folgende Winkel im Bogenmaß an:
$\alpha = 30°$, $\beta = 18°$, $\gamma = 45°$, $\delta = 72°$, $\epsilon = 120°$, $\eta = 24°$, $\theta = 156°$, $\phi = 180°$, $\psi = 360°$.

Aufgabe 3

Eine 8m lange Leiter wird mit Steigungswinkel 78° an eine senkrechte Wand gelehnt.

(a) Wie hoch liegt der höchste Punkt der Leiter über dem Boden?

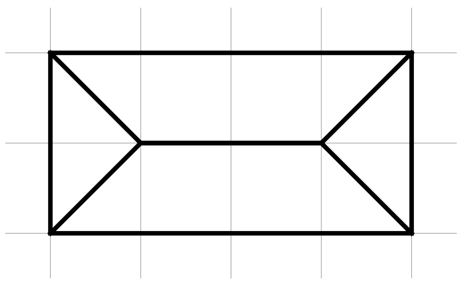
(b) Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?

Aufgabe 4

Der Minutenzeiger einer Turmuhr ist genau 1m lang.
Der Mittelpunkt des Zifferblatts sei Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit x-Achse nach rechts und y-Achse nach oben (Längeneinheit: 1m).
Geben Sie die Koordinaten $(x|y)$ der Zeigerspitze zu folgenden Uhrzeiten an.
(a) 14:05 Uhr, (b) 14:10 Uhr, (c) 14:20 Uhr, (d) 14:35 Uhr, (e) 14:50 Uhr.

Aufgabe 5

Die Abbildung zeigt ein Hausdach im Grundriß. (Seitenlänge der Kästchen: 5m.)



Der Dachfirst (Mittellinie in der Abb.) soll 5m über dem Rand des Daches liegen.
Zeichnen Sie einen Aufriß dieses Daches.
Berechnen Sie die Längen und die Neigungswinkel der vier schrägen Dachkanten.

Aufgabe 6

Wie hoch (in Kilometern) liegt die Stadt Weiden (geographische Breite $\phi = 49°40'$ N) in nördlicher Richtung über der Äquatorebene der Erde?
Wie weit ist Weiden von der Erdachse entfernt?
Hinweis: Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius $R = 6370$km.

Aufgabe 7

Ein Rad (Radius $R = 45$cm) rollt einen Meter (1.00m) weit.
Wie hoch liegt dann sein ursprünglicher Auflagepunkt über dem Boden?

Aufgabe 8

Folgende Liste zeigt die Ableitungen $f'(x)$ der wichtigsten Funktionen $f(x)$.

$f(x)$	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	$3x^2$	$2x$	1	0	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

(A) Welche dieser 10 Regeln lassen sich auf die Formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ zurückführen?

(B) Benutzen Sie die Potenzschreibweise, um die Ableitungen folgender Funktionen zu berechnen.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \qquad g(x) = \sqrt{x^3}, \qquad h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \qquad k(x) = \frac{5}{6\sqrt[3]{x^4}}.$$

(C) Berechnen Sie mithilfe von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $\quad g(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$, $\quad h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

(b) $f(x) = (x^3)^2$, $\quad g(x) = (x^8)^7$, $\quad h(x) = \sqrt{x^2}$.

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, $\quad g(x) = \ln(x^2)$, $\quad h(x) = \cos(x^2)$.

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-4x+5}$, $\quad g(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$, $\quad h(x) = \cos(x^2 - 4x + 5)$.

(e) $f(x) = (\mathrm{e}^x)^2$, $\quad g(x) = (\ln x)^2$, $\quad h(x) = (\sin x)^2$.

(f) $f(x) = \sin(2x - 3)$, $\quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, $\quad h(x) = -\ln(\cos x)$.

(g) $f(x) = \tan x$, $\quad g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $\quad h(x) = x^2 \sin x$.

(h) $f(x) = x \ln x$, $\quad g(x) = \sin x \cos x$, $\quad h(x) = \tan x \cos x$.

Modul Mathematik II (BeVorStudium): Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Beweisen Sie den **Cosinussatz**: In einem beliebigen Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und den gegenüberliegenden Innenwinkeln α, β, γ gilt

$$c^2 \;=\; a^2 \,+\, b^2 \,-\, 2ab\cos\gamma.$$

Hinweis: Das Lot vom Punkt B auf die Gerade AC schneidet diese im Punkt C'. Wenden Sie den Satz von Pythagoras an auf das rechtwinklige Dreieck ABC'.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Beträge $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$.

(b) Welchen Winkel ϕ schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein ?

(c) Berechnen Sie das Kreuzprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Berechnen Sie damit die Skalarprodukte

$$\vec{a} \circ \vec{c}, \qquad \vec{b} \circ \vec{c}.$$

Aufgabe 3

Gegeben seien der Punkt $A(1|2|3)$ und die Vektoren

$$\vec{v} \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Gleichung der Gerade g mit Aufpunkt A und Richtungsvektor $\vec{w}$ auf.

(b) Stellen Sie die Gleichung der Ebene E mit Aufpunkt A und Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auf.

(c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Punkte auf g bzw. auf E liegen.

$$P(25|-38|19), \quad Q(1|3|-2), \quad R(14|-5|3).$$

(d) Geben Sie die Gleichung einer Gerade h an, welche E im Punkt $S(6|1|?)$ schneidet und zu E normal ist.

(e) Geben Sie die Gleichungen zweier Geraden k und ℓ an, welche g im Punkt $T(-5|?|?)$ senkrecht schneiden und zueinander senkrecht stehen.

Aufgabe 4

(a) Welcher Punkt auf der Gerade g von Aufgabe 3a hat den geringsten Abstand vom Punkt $B(1|2|4)$?
Hinweis: Berechnen Sie diesen Abstand als Funktion $f(\lambda)$ des Parameters λ, und lösen Sie die Gleichung $f'(\lambda) = 0$.

(b) Wie weit ist der Punkt $B(1|2|4)$ von der Ebene E aus Aufgabe 3b entfernt ?
Hinweis: Stellen Sie die Gleichung jener Gerade s auf,
welche durch den Punkt B geht und die Ebene E senkrecht schneidet.

Aufgabe 5

Wir betrachten den **Würfel** mit den Ecken $A(0|0|0)$, $B(1|0|0)$, $C(1|1|0)$, $D(0|1|0)$, sowie $E(0|0|1)$, $F(1|0|1)$, $G(1|1|1)$, $H(0|1|1)$.

(a) Geben Sie die Geradengleichungen seiner vier **Raumdiagonalen** an.

(b) Berechnen Sie den Abstand der Ecke B von der Raumdiagonalen g durch A,

$$g: \vec{X} = \lambda \cdot \vec{u}, \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweise: Konstruieren Sie eine Ebene

$$E: \vec{Y} = \vec{P} + \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w},$$

die zu g senkrecht steht und deren Aufpunkt P auf g liegt,

$$\vec{P} = \lambda_P \cdot \vec{u}.$$

Wählen Sie dann P (also den Wert von λ_P) so, daß B auf E liegt.
Der gesuchte Abstand ist dann die Länge des Vektors $\vec{B} - \vec{P}$, (Warum ?)

(c) Lösen Sie Teil (b) dieser Aufgabe mit Hilfe der Differenzialrechnung.

Aufgabe 6

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \sin^2 x$ und $g(x) = \sin(x^2)$.

(b) Versuchen Sie, auf graphischem Wege die Graphen der Ableitungen $f'(x)$ bzw. $g'(x)$ zu gewinnen.

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ exakt nach der Kettenregel.

Modul Mathematik II (BeVorStudium): Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Die Punkte $A(1|0|2)$, $B(2|1|3)$ und $C(0|1|2)$ liegen in der Ebene E.

(a) Wie ist die Koordinate z zu wählen, damit der Punkt $D(2|4|z)$ auf E liegt?

(b) Bestimmen Sie die Gleichung jener Gerade g durch den Punkt $P(5|5|5)$, welche E senkrecht schneidet.

(c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(5|5|5)$ von E.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Werte folgender Integrale durch **Flächenbestimmung** (ohne eine Stammfunktion zu bilden).

(a)

$$\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \mathrm{d}x$$

(b)

$$\int_{-2}^3 (x+1)\,\mathrm{d}x$$

(c)

$$\int_{-4}^4 (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x$$

(d)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 3

Wie ist die obere Grenze b des Integrals

$$\int_{-2}^b (2x-3)\,\mathrm{d}x$$

zu wählen, damit das Integral den Wert 0 annimmt ?

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen.

(a)

$$\int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \mathrm{d}x$$

(b)

$$\int_{-2}^{3} (x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x$$

(c)

$$\int_{-1}^{1} x^n\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{1} x^n\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \text{(jeweils für die Fälle } n = 0, 1, 2, 3).$$

(d)

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$$

(e)

$$\int_{0}^{\pi/2} \big(3\sin x \,+\, 5\cos x\big)\,\mathrm{d}x$$

(f)

$$\int_{0}^{\pi} x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

(g)

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;\equiv\; \int_{1}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

(h)

$$\int_{2}^{7} \frac{4}{2x-3}\,\mathrm{d}x$$

(i)

$$\int_{2}^{7} \frac{4x+5}{2x-3}\,\mathrm{d}x$$

(k)

$$\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

Impressum

Autor:	Dr. Michael Seidl
Herausgegeben durch:	Teilprojekt #aufstieggestalten der OTH Amberg-Weiden aus dem Verbundprojekt „OTH mind“ mit der OTH Regensburg des Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“
Kontakt:	Hetzenrichter Weg 15, 92637 Weiden in der Oberpfalz othmind@oth-aw.de www.oth-aw.de/oth-mind
Copyright:	Dieses Kursmaterial ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0). Bei einer Weitergabe soll der Name des Urhebers wie folgt genannt werden: „Dr. Michael Seidl, im Rahmen von OTH mind #aufstieggestalten, OTH Amberg-Weiden“.
Hinweis:	Diese Publikation wurde im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“ erstellt. Die in dieser Publikation dargelegten Inhalte liegen in der alleinigen Verantwortung des Autors.