Ostbayerische Technische Hochschule
Amberg-Weiden

BeVorStudium

Modul Mathematik I

Skript

2018

Dr. Michael Seidl

OTH mind - BMBF Verbundprojekt
#aufstieggestalten

GEFÖRDERT VOM
Bundesministerium für Bildung und Forschung

AUFSTIEG DURCH BILDUNG
OFFENE HOCHSCHULEN

1 Zahlenbereiche und Rechenoperationen

1.1 Mengen

In der Mathematik hat der Begriff "Menge" eine sehr spezielle Bedeutung. Durch ihn lassen sich mathematische Aussagen auf einfache Weise präzise formulieren.

1.1.1 Definition

Def.: (G. Cantor) Unter einer **Menge** verstehen wir eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen die **Elemente** der Menge.

Bsp.: Hier sind drei Mengen A, B und C, dargestellt in **aufzählender Form**,

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Eiche}, \text{Buche}, \text{Kiefer}\}, \\ B &= \{\text{Merkur}, \text{Venus}, \text{Erde}, \text{Mars}, \text{Jup}, \text{Sat}, \text{Ura}, \text{Nep}, \text{Plu}\}, \\ C &= \{a, b, c\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Bem. 1: Alle Elemente einer Menge sind voneinander verschieden.
Die Menge der Buchstaben des Wortes "MISSISSIPPI" ist

$$D = \{M, I, S, P\}. \tag{2}$$

Bem. 2: In der aufzählenden Form spielt die Reihenfolge keine Rolle.
Die Elemente von D kann man also auch in alphabetischer Folge angeben,

$$D = \{I, M, P, S\}. \tag{3}$$

Bem. 3: Die spezielle Menge, die überhaupt kein Element enthält, heißt **leere Menge**. Sie wird mit dem Symbol $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet.

Für uns am wichtigsten sind **Zahlenmengen**, z.B.:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \tag{4}$$

$$F = \{2, 4, 6, 8, ..., 98, 100\}. \tag{5}$$

Es gibt auch Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten, z.B.:

$$G = \{7, 14, 21, 28, 35, ...\}. \tag{6}$$

Ist das Objekt x ein Element der Menge Y, so schreibt man

$$x \in Y. \tag{7}$$

So gilt etwa für die oben genannten Mengen

$$7 \in E, \qquad 7 \notin F, \qquad 7 \in G. \tag{8}$$

Mit Hilfe der Menge der natürlichen Zahlen (siehe auch Abschnitt 1.2),

$$\mathbb{N} \;=\; \{1, 2, 3, ...\}, \tag{9}$$

lassen sich die oben genannten Mengen auch in **beschreibender Form** darstellen,

$$\begin{aligned} E &= \big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; n \leq 7\big\}, \\ F &= \big\{2 \cdot n \;\big|\; n \in \mathbb{N},\; n \leq 50\big\}, \\ G &= \big\{7 \cdot n \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}. \end{aligned}$$

Man liest dies, etwa im Fall F, wie folgt:
"F ist die Menge aller Zahlen der Form $2 \cdot n$, wobei n eine nat. Zahl mit $n \leq 50$ ist."

Übungsaufgabe:

1. Stellen Sie die Menge $H = \{1, 3, 5, ..., 19\}$ in beschreibender Form dar.

1.1.2 Teilmengen

Def.: Die Menge A heißt **Teilmenge** der Menge B, wenn A vollständig in B enthalten ist (wenn also jedes Element von A auch Element von B ist). Man schreibt dann

$$A \subseteq B. \tag{10}$$

Dabei darf auch $A = B$ sein. Dagegen heißt A **echte Teilmenge** von B, wenn B auch Elemente enthält, die nicht zu A gehören. Man schreibt dann

$$A \subset B. \tag{11}$$

Enthält A dagegen wenigstens ein Element, das **nicht** zu B gehört, so schreibt man

$$A \not\subseteq B. \tag{12}$$

1.1.3 Mengenoperationen

Def.: Unter der **Schnittmenge** (oder dem **Durchschnitt**) $A \cap B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Def.: Unter der **Vereinigung** $A \cup B$ zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die entweder zu A oder zu B (oder zu beiden) gehören.

Def.: $A \backslash B$ bezeichnet die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

Bsp.: Im Fall der Mengen

$$A \;=\; \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B \;=\; \{3, 4, 5, 6, 7\} \tag{13}$$

gilt

$$A \cap B \;=\; \{3, 4, 5\}, \qquad A \cup B \;=\; \{1, 2, 3, ..., 7\}, \qquad A \backslash B \;=\; \{1, 2\}. \tag{14}$$

Übungsaufgaben:

1. X und Y seien die Mengen der Buchstaben der Wörter PAAR bzw. RATTE,
$$X = \{\mathrm{P}, \mathrm{A}, \mathrm{R}\}, \qquad Y = \{\mathrm{R}, \mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{E}\}. \tag{15}$$
Ferner sei Z die Menge der Buchstaben von ZELT.
Man bilde die Mengen: $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X \backslash Y$, $Y \backslash X$, $X \cap Z$, $X \backslash Z$, $Z \cup (X \cap Y)$.

2. Es sei T_n die Menge aller **Teiler** der Zahl n, etwa $T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$.
Bestimmen Sie die Schnittmenge $T = T_{24} \cap T_{36}$.
Welches ist das größte Element von T?

3. Es sei V_n die Menge aller **Vielfachen** der Zahl n, etwa $V_7 = \{7, 14, 21, 28, ...\}$.
Bestimmen Sie die Schnittmenge $V = V_3 \cap V_5$.
Welches ist das kleinste Element von V?
Gibt es eine Zahl m, sodaß $V = V_m$?

4. Unter welcher Bedingung an zwei Mengen A und B gilt: $A \subseteq (A \cap B)$?

5. Zeichnen Sie **Umrißlinien** der Mengen T_6, T_8 und T_9 ein:

   4   2   7
      1   3   9
   8   6   5

   Markieren Sie die Schnittmengen $T_6 \cap T_8$, $T_6 \cap T_9$ und $T_8 \cap T_9$.

1.1.4 Ergänzung: der Folgepfeil

Es seien A und B zwei Mengen mit der Eigenschaft $A \cap B \neq \emptyset$.
Ist nun x ein Element der Schnittmenge, $x \in A \cap B$, so muß auch $x \in A$ gelten.
In Kurzform lautet diese Schlußfolgerung
$$x \in A \cap B \qquad \Rightarrow \qquad x \in A. \tag{16}$$
Der Folgepfeil "$\Rightarrow$" wird gelesen als: "daraus folgt".

Die umgekehrte Schlußfolgerung ist nicht gerechtfertigt,
$$x \in A \qquad \not\Rightarrow \qquad x \in A \cap B. \tag{17}$$
Ist nämlich $x \in A$, so kann durchaus gelten $x \notin B$ und daher $x \notin A \cap B$.

Dagegen ist es korrekt, zu schreiben
$$\Big(x \in A \quad \text{und} \quad x \in B\Big) \qquad \Rightarrow \qquad x \in A \cap B. \tag{18}$$
Jetzt ist auch die Umkehrung richtig,
$$x \in A \cap B \qquad \Rightarrow \qquad \Big(x \in A \quad \text{und} \quad x \in B\Big). \tag{19}$$
Man schreibt in diesem Fall
$$x \in A \cap B \qquad \Leftrightarrow \qquad \Big(x \in A \quad \text{und} \quad x \in B\Big). \tag{20}$$
Das Symbol "$\Leftrightarrow$" wird gelesen als: "ist äquivalent zu" oder "gilt genau dann, wenn".

1.2 Die natürlichen Zahlen

Def.: Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, ...$ bilden eine unendliche Menge $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} \;=\; \{1, 2, 3, ...\}. \tag{21}$$

1.2.1 Rechengesetze

Satz 1: Für die Addition beliebiger natürlicher Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}$ gelten das **Kommutativ-** und das **Assoziativgesetz**,

$$a + b \;=\; b + a \quad (\mathrm{K}), \qquad\qquad (a + b) + c \;=\; a + (b + c) \quad (\mathrm{A}). \tag{22}$$

Satz 2: Die gleichen Gesetze gelten auch für die Multiplikation,

$$a \cdot b \;=\; b \cdot a \quad (\mathrm{K}), \qquad\qquad (a \cdot b) \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c) \quad (\mathrm{A}). \tag{23}$$

Wir erläutern diese Gesetze an einfachen Beispielen,

$$\begin{aligned} (27 + 19) + 33 \;&=\; (19 + 27) + 33 \;=\; 19 + (27 + 33) \;=\; 19 + 60 \;=\; 79, \\ (25 \cdot 13) \cdot 4 \;&=\; (13 \cdot 25) \cdot 4 \;=\; 13 \cdot (25 \cdot 4) \;=\; 13 \cdot 100 \;=\; 1300, \end{aligned}$$

wobei jeweils im ersten Schritt (K) und im zweiten Schritt (A) angewandt wurde.

Bem.: Werden Zahlen durch Buchstaben $a, b, c, x, y...$ vertreten,
so läßt man bei der Multiplikation den Punkt "$\cdot$" meistens fort,

$$ab \;=\; ba, \qquad\qquad (ab)c \;=\; a(bc). \tag{24}$$

Ebenso schreibt man statt "$2 \cdot a$" einfacher "$2a$" (nicht jedoch "$a2$").

Satz 3: Für Addition und Multiplikation zusammen gilt das **Distributivgesetz**,

$$a(b + c) \;=\; ab \,+\, ac \quad (\mathrm{D}). \tag{25}$$

Bem.: Auf der rechten Seite sind keine Klammern nötig:
Nach der Regel **"Punkt vor Strich!"** sind im Ausdruck

$$ab \,+\, ac \;\equiv\; a \cdot b \,+\, a \cdot c \tag{26}$$

die beiden Multiplikationen ("Punkt") **vor** der Addition ("Strich") auszuführen.

Man kann (D) von links nach rechts lesen: "**Ausmultiplizieren**", z.B.:

$$25 \cdot (80 \,+\, 3) \;=\; 25 \cdot 80 \,+\, 25 \cdot 3 \;=\; 2000 \,+\, 75 \;=\; 2075, \tag{27}$$

oder von rechts nach links: "Den gemeinsamen Faktor a **ausklammern**", z.B.:

$$4 \cdot 13 \,+\, 4 \cdot 17 \;=\; 4 \cdot (13 + 17) \;=\; 4 \cdot 30 \;=\; 120. \tag{28}$$

1.2.2 Teilbarkeit

Def.: Die Zahl $t \in \mathbb{N}$ heißt **Teiler** von $a \in \mathbb{N}$ (in Zeichen: $t|a$), wenn es eine dritte Zahl $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $a = b\,t$,

$$t|a \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\, b \in \mathbb{N}: \quad a = b\,t. \tag{29}$$

(In dieser Kurzschreibweise ist "$\exists$" als *"es gibt ein"* und ":" als *"sodaß gilt"* zu lesen.)
In diesem Fall ist natürlich nicht nur t, sondern auch b ein Teiler von a.

Bsp.: Die Zahl $a = 12$ hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und 12.

Jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$ hat mindestens zwei Teiler: Die Zahl 1 und die Zahl a selbst.

Ist $t \in \mathbb{N}$ **kein** Teiler von $a \in \mathbb{N}$,
so bleibt bei Division $a : t$ ein **Rest** $r \in \mathbb{N}$, mit $1 \leq r \leq t - 1$.
Bsp.: Im Fall $a = 300$ und $t = 7$ bleibt der Rest $r = 6$,

$$\begin{array}{l} 3\dot{0}0 \;:\; 7 \;=\; 42 \text{ R } 6. \\ \underline{-28} \\ \;\;\;20 \\ \;\;\underline{-14} \\ \;\;\;\;\;6 \end{array} \tag{30}$$

Def.: Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt **Primzahl**, wenn sie außer 1 und p keine anderen Teiler hat. Die Zahl 1 selbst gilt nicht als Primzahl.

Die kleinsten Primzahlen sind

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... \tag{31}$$

Die 2 ist die einzige gerade Primzahl.

Satz: Jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ läßt sich auf **eindeutige** Weise in Primfaktoren zerlegen, z.B.

$$924 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11. \tag{32}$$

Wir führen die **Potenzschreibweise** (mit natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}$) ein,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}. \tag{33}$$

Wir schreiben also etwa

$$31752 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2. \tag{34}$$

Übungsaufgaben:

1. Bestimmen Sie die Primfaktor-Zerlegungen von: $a = 1800$, $b = 1024$, $c = 97$.
2. Zeigen Sie: Die Folge 2, 3, 5, 7, 11, ... der Primzahlen kann nicht abbrechen.
(Es gibt also **unendlich viele** verschiedene Primzahlen.)
Hinweis: Gäbe es eine größte Primzahl, sagen wir P, dann könnte man das Produkt $Q = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot P$ **aller** Primzahlen bilden. Dann hätte aber (warum?) die Zahl $Q + 1$ außer 1 und sich selbst keine Teiler, müsste also wieder eine Primzahl sein. ...

1.3 Die ganzen Zahlen

In der Menge $\mathbb{N}$ ist die **Differenz** nicht immer erklärt,

$$5 - 3 = 2, \qquad 5 - 5 = \; ? \qquad 5 - 8 = \; ??? \tag{35}$$

Man führt daher die **Zahl 0** und die **negativen Zahlen -1, -2, -3, ...** ein,

$$5 - 5 = 0, \qquad 5 - 8 = -3. \tag{36}$$

Bsp.: Sinkt eine Temperatur vom Wert 5°C um 8° ab, so erreicht sie den Wert −3°C.

Def.: Die erweiterte Zahlenmenge

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \tag{37}$$

heißt die Menge der **ganzen Zahlen**. Mit der Menge

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\} \tag{38}$$

gilt also $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$.

1.3.1 Die Zahlengerade (ZG)

Die ZG ist eine von links nach rechts verlaufende (unendlich ausgedehnte) Gerade g.
• Einen beliebig gewählten Punkt auf g identifizieren wir mit der **Zahl 0**.
• Die **Zahlen 1, 2, 3, ...** entsprechen dann jenen Punkten,
die um ein, zwei, drei, ... Längeneinheiten (z.B. cm) **rechts von 0** liegen.
• Die **Zahlen -1, -2, -3, ...** entsprechen den Punkten,
die um ein, zwei, drei, ... Längeneinheiten **links von 0** liegen.

(SKIZZE)

Die Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt **kleiner (größer)** als die Zahl $b \in \mathbb{Z}$,

$$a < b \quad (a > b), \tag{39}$$

wenn a auf der Zahlengerade **links (rechts)** von b liegt.

Def.: Der **Betrag** $|a|$ der Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist ihr Abstand (auf der ZG) von der Zahl 0,

$$|5| = 5, \qquad |-7| = 7, \qquad |0| = 0. \tag{40}$$

Für beliebiges $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt also: $|a| > 0$.

Def.: Die **Gegenzahl** $-a$ zur Zahl $a \in \mathbb{Z}$ ist auf der ZG das Spiegelbild von a bezüglich der Zahl 0. Es gelten also etwa

$$a = 5 \quad \Rightarrow \quad -a = -5,$$
$$a = -8 \quad \Rightarrow \quad -a = 8 \equiv -(-8).$$

Die Zahl 0 ist mit ihrer Gegenzahl identisch, $-0 = 0$.

1.3.2 Rechnen mit ganzen Zahlen

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ zwei beliebige ganze Zahlen.

Addition: Auf der ZG liegt die Zahl $a + b$ von a aus um die Strecke $|b| > 0$ ...
• ... nach **rechts** verschoben, falls $b > 0$,
• ... nach **links** verschoben, falls $b < 0$.
Bsp.:

$$\begin{aligned} 3 + 8 &= 11, \\ 3 + (-8) &= -5, \\ (-3) + (-8) &= -11, \\ (-3) + 8 &= 5. \end{aligned} \tag{41}$$

Die **Gegenzahl einer Summe** ist also die Summe der Gegenzahlen,

$$-(a + b) = (-a) + (-b). \tag{42}$$

Multiplikation: Die Zahl ab hat den Betrag $|ab| = |a| \cdot |b|$, und es gilt:
• $ab = 0$, falls $a = 0$ oder $b = 0$,
• $ab > 0$, falls a und b gleiche Vorzeichen haben,
• $ab < 0$, falls a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben.
Bsp.:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 8 &= 24, \\ 3 \cdot (-8) &= -24, \\ (-3) \cdot (-8) &= 24, \\ (-3) \cdot 8 &= -24. \end{aligned} \tag{43}$$

Die **Gegenzahl** $-a$ von $a \in \mathbb{Z}$ läßt sich also als Produkt mit -1 schreiben,

$$-a = (-1) \cdot a \equiv a \cdot (-1). \tag{44}$$

Für die **Gegenzahl eines Produkts** folgt (Assoziativ- und Kommutativgesetz !)

$$-(ab) = (-1) \cdot (a \cdot b) = (-a)b = a(-b). \tag{45}$$

Im Sinne der Regel **"Punkt vor Strich"** schreibt man kurz $-(ab) \equiv -ab$.
Weiterhin folgen **Potenzregeln** wie etwa

$$(-a)^2 = a^2, \qquad (-a)^3 = -(a^3) \equiv -a^3. \tag{46}$$

Die **Subtraktion** läßt sich auf die Addition zurückführen:
Subtraktion der Zahl b ist äquivalent zu Addition der Gegenzahl $-b$.
Bsp.:

$$\begin{aligned} 3 - 8 &= 3 + (-8) = -5, \\ 3 - (-8) &= 3 + 8 = 11, \\ (-3) - (-8) &= (-3) + 8 = 5, \\ (-3) - 8 &= (-3) + (-8) = -11. \end{aligned} \tag{47}$$

Diese vier Beispiele lassen erkennen:

Satz: Der Betrag $|a - b|$ ist der **gegenseitige Abstand** der Zahlen a und b auf der ZG.

1.4 Die rationalen Zahlen: Brüche

Für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ ist der **Quotient** $a : b$ in der Regel **keine** ganze Zahl,

$$12 : 4 \equiv \frac{12}{4} = 3, \qquad 12 : 5 \equiv \frac{12}{5} = \;??? \tag{48}$$

Man führt daher die **Brüche** $\frac{a}{b}$ ein, mit **Zähler** $a \in \mathbb{Z}$ und **Nenner** $b \in \mathbb{Z}$ $(b \neq 0)$.

Achtung: Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist nur erklärt, wenn der **Nenner ungleich 0** ist, $b \neq 0$.

1.4.1 Lage auf der Zahlengerade

Fall I: Zähler und Nenner positiv ($a > 0$ und $b > 0$)

Wegen $38 : 7 = 5\,\mathrm{R}\,3$ soll $x = \frac{38}{7}$ eine **nicht-ganze Zahl** mit $5 < x < 6$ sein.
Die genaue Lage auf der ZG findet man durch **schriftliche Division**,

$$\begin{array}{l} \frac{38}{7} \equiv 38 : 7 = 5.42\ldots \\ \quad\underline{-35} \\ \qquad 30 \\ \quad\;\underline{-28} \\ \qquad\; 20 \\ \qquad\;\ldots \end{array} \tag{49}$$

Fall II: Zähler oder Nenner negativ

Merke: Die Zahl $q = \frac{a}{b}$ (mit $b \neq 0$) hat den Betrag $|q| = \frac{|a|}{|b|}$;
dabei gilt:
- $\frac{a}{b} = 0$, falls $a = 0$,
- $\frac{a}{b} > 0$, falls a und b gleiche Vorzeichen haben,
- $\frac{a}{b} < 0$, falls a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Einige Beispiele:

$$\frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{5}{-3} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}, \tag{50}$$

wobei $-\frac{5}{3} < 0$ wieder die **Gegenzahl** von $\frac{5}{3} > 0$ ist.

1.4.2 Die Menge $\mathbb{Q}$

Um alle (positiven und negativen) Brüche $\frac{a}{b}$ ganzer Zahlen a und b zu erfassen,
dürfen wir uns wegen $\frac{5}{-3} = \frac{-5}{3}$ und $\frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$ auf **positive Nenner** $b > 0$ beschränken:

Def.: Die sogenannten **rationalen Zahlen** bilden eine unendliche Menge $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \right\}. \tag{51}$$

Wegen $\frac{12}{3} = 4$, $\frac{-12}{3} = -4$, etc. ist die Menge $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.4.3 Rechnen mit Brüchen

Der Wert des Bruchs $\frac{a}{b}$ ändert sich nicht, wenn man mit dem Faktor $c \neq 0$ **erweitert**,

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \equiv \frac{ac}{bc}. \tag{52}$$

So gilt etwa $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{28}{21} = \frac{28\ 000}{21\ 000}$.
Umgekehrt darf man mit dem Faktor $c \neq 0$ **kürzen**,

$$\frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} \equiv \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}. \tag{53}$$

So gilt etwa $\frac{100}{80} \equiv \frac{100/20}{80/20} = \frac{5}{4}$ oder, als formales Beispiel,

$$\frac{25\,x^2y}{75\,xy^3} \equiv \frac{25\,x^2y/25\,xy}{75\,xy^3/25\,xy} = \frac{x}{3y^2}. \tag{54}$$

Größenvergleich bei Brüchen:
Um zu erkennen, welcher von zwei Brüchen der größere ist,
muß man diese durch **Erweitern** auf **gleiche Nenner** bringen,

$$\left\{\frac{16}{12}, \frac{21}{16}\right\} \rightarrow \left\{\frac{16 \cdot 4}{12 \cdot 4}, \frac{21 \cdot 3}{16 \cdot 3}\right\} \rightarrow \left\{\frac{64}{48}, \frac{63}{48}\right\} \Rightarrow \frac{16}{12} > \frac{21}{16}. \tag{55}$$

Geschickterweise haben wir hier den **Hauptnenner** (HN) 48 gebildet:
Der HN ist das **kleinste gemeinsame Vielfache** (kgV) der beiden Nenner.

Rechenregeln:

1. Zur **Addition** oder **Subtraktion** zweier Brüche
   muß man diese durch **Erweitern** auf **gleiche Nenner** bringen,

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{7} = \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{56}{21} + \frac{15}{21} = \frac{56 + 15}{21} = \frac{71}{21}. \tag{56}$$

$$\frac{8}{3} - \frac{5}{7} = \frac{8 \cdot 7}{3 \cdot 7} - \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{56}{21} - \frac{15}{21} = \frac{56 - 15}{21} = \frac{41}{21}. \tag{57}$$

2. Bei **Multiplikation** zweier Brüche multiplizieren sich die Zähler und die Nenner,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \tag{58}$$

3. **Division** durch einen Bruch entspricht Multiplikation mit dem **Kehrbruch**,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \equiv \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \equiv \frac{ad}{bc}. \tag{59}$$

Bsp.: Ein wichtiger Spezialfall von Regel 2 ist

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}. \tag{60}$$

Zahlenbeispiele (ggf. mit Kürzen):

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{12}, \qquad \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{10}, \qquad \frac{3}{19} \cdot \frac{19}{4} = \frac{3}{4}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \tag{61}$$

Übungsaufgaben:

1. Kürzen Sie folgende Brüche soweit wie möglich:
$$\frac{96}{72}, \qquad \frac{77}{88}, \qquad \frac{14\,a}{21\,a^3 b}, \qquad \frac{16\,ab\,+\,24\,b^2}{32\,ab^3}. \tag{62}$$
2. Fassen Sie jeweils zu einem einzelnen Bruch zusammen:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \qquad \frac{6}{7}-\frac{7}{8}, \qquad \frac{a}{2b}+\frac{2a}{b}, \qquad 1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right). \tag{63}$$

1.4.4 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ (also $n > 0$) legen wir fest
$$a^{-n} \;=\; \frac{1}{a^n}. \tag{64}$$
Bsp.:
$$2^{-3} \;=\; \frac{1}{2^3} \;=\; \frac{1}{8}, \qquad 10^{-1} \;=\; \frac{1}{10} \;=\; 0.1, \qquad 10^{-6} \;=\; \frac{1}{10^6} \;=\; 0.000\,001. \tag{65}$$

Satz: Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gelten die **Potenzgesetze**,
$$a^{n+m} \;=\; a^n a^m, \qquad a^{n-m} \;=\; \frac{a^n}{a^m}, \qquad a^0 \;=\; 1, \qquad a^{n\cdot m} \;=\; (a^n)^m \;=\; (a^m)^n. \tag{66}$$

Übungsaufgaben:

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
$$a \;=\; 18^5 \cdot 3^{-10}, \qquad b \;=\; \frac{5^5}{25^2}, \qquad c \;=\; \frac{6^8}{3^4 \cdot 9^3}. \tag{67}$$
2. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung der folgenden natürlichen Zahlen:
$$n \;=\; 5^2 \cdot 15^3 \cdot 25^2 \cdot 35^5, \qquad m \;=\; 12^2 \cdot 18^3 \;-\; 12^3 \cdot 18^2. \tag{68}$$

1.4.5 Zehnerpotenzen in der Physik

Hat eine Größe die Maßeinheit u (z.B.: m, Hz, B), so schreibt man
$$\begin{aligned}
1\,\mathrm{Tu} &= 10^{12}\,\mathrm{u} \;=\; 1\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{u},\\
1\,\mathrm{Gu} &= 10^{9}\,\mathrm{u} \;=\; 1\,000\,000\,000\,\mathrm{u},\\
1\,\mathrm{Mu} &= 10^{6}\,\mathrm{u} \;=\; 1\,000\,000\,\mathrm{u},\\
1\,\mathrm{ku} &= 10^{3}\,\mathrm{u} \;=\; 1\,000\,\mathrm{u},\\
1\,\mathrm{mu} &= 10^{-3}\,\mathrm{u} \;=\; 0.001\,\mathrm{u},\\
1\,\mu\mathrm{u} &= 10^{-6}\,\mathrm{u} \;=\; 0.000\,001\,\mathrm{u},\\
1\,\mathrm{nu} &= 10^{-9}\,\mathrm{u} \;=\; 0.000\,000\,001\,\mathrm{u},
\end{aligned}$$
gelesen: "Tera, Giga, Mega, kilo, milli, mikro, nano".

Bsp.: $62.58\,\mathrm{GHz} \;=\; 62.58 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz} \;=\; 6.258 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz} \;\approx\; 62\,580\,000\,000\,\mathrm{Hz}.$

1.5 Wurzeln und die Menge $\mathbb{R}$

1.5.1 Wurzeln

Def.: Sei $a \in \mathbb{Q}$ und $a \geq 0$.
Unter der **Wurzel** von a versteht man jene Zahl $x = \sqrt{a} \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$x^2 \equiv x \cdot x = a. \tag{69}$$

Bsp.:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt{36} = 6, \qquad \sqrt{100} = 10, \qquad \sqrt{1} = 1, \qquad \sqrt{0} = 0, \\
&\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \qquad \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}, \qquad \sqrt{0.01} = 0.1, \qquad \sqrt{0.49} = 0.7, \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Rechenregeln: Im allgemeinen gilt $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{9 + 16} &= \sqrt{25} = 5, \\
\sqrt{9} + \sqrt{16} &= 3 + 4 = 7.
\end{aligned} \tag{70}$$

Dagegen gelten die wichtigen Regeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad \sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n. \tag{71}$$

Bsp. (Teilweises Radizieren):

$$\begin{aligned}
\sqrt{12} &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \\
\sqrt{72} &= \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}.
\end{aligned} \tag{72}$$

1.5.2 Irrationale Zahlen

Ist $a \in \mathbb{N}$ **keine Quadratzahl**,

$$a \notin \left\{n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\right\}, \tag{73}$$

so ist die Wurzel $\sqrt{a}$ eine **irrationale Zahl**, $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.
Solche Zahlen $x \notin \mathbb{Q}$ lassen sich als **nicht-periodische** Dezimalbrüche darstellen, etwa

$$\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 562\ 373\ 095\ ... \tag{74}$$

Jede **rationale** Zahl $x \in \mathbb{Q}$ entspricht dagegen einem **periodischen** Dezimalbruch,

$$\frac{24}{17} = 1.\overline{411\ 764\ 705\ 882\ 3529} < \sqrt{2}, \qquad \frac{17}{12} = 1.416666... = 1.41\overline{6} > \sqrt{2}. \tag{75}$$

1.5.3 Kubikwurzeln, etc.

Def.: Sei $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$, und sei $n \in \{2, 3, 4, ...\}$.
Die n**-te Wurzel** von a ist jene Zahl $x = \sqrt[n]{a} \geq 0$ mit der Eigenschaft

$$x^n \;=\; a. \tag{76}$$

Im Fall $n = 2$ spricht man von der **Quadratwurzel** (Abschnitt 1.5.1),
im Fall $n = 3$ von der **Kubikwurzel**.

Bsp.:

$$\sqrt[2]{9} \;\equiv\; \sqrt{9} \;=\; 3, \qquad \sqrt[3]{125} \;=\; 5, \qquad \sqrt[6]{1000\,000} \;=\; 10, \qquad \sqrt[3]{\frac{64}{27}} \;=\; \frac{4}{3}. \tag{77}$$

Rechenregeln: Im allgemeinen gilt $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$!!! Dagegen gelten

$$\sqrt[n]{ab} \;=\; \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \;=\; \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad \sqrt[n]{a^m} \;=\; \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \tag{78}$$

1.5.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wurzeln lassen sich als **Potenzen** schreiben,

$$\sqrt{x} \;=\; x^{1/2}, \qquad \sqrt[3]{x} \;=\; x^{1/3}, \qquad \sqrt[n]{x} \;=\; x^{1/n}, \tag{79}$$

oder, noch allgemeiner,

$$\sqrt[n]{a^m} \;=\; a^{m/n}. \tag{80}$$

Dann gelten die **Potenzgesetze** allgemein für rationale Exponenten $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$a^{p+q} \;=\; a^p a^q, \qquad a^{p-q} \;=\; \frac{a^p}{a^q}, \qquad a^{p \cdot q} \;=\; (a^p)^q \;=\; (a^q)^p. \tag{81}$$

2 Terme

2.1 Definition

Def.: Ein Term ist ein Ausdruck mit Variablen $a, b, c, ...$ und/oder Zahlen, die durch Rechenoperationen "+", "·", "−", etc. verknüpft sind.
Der Multiplikationspunkt "·" wird fortgelassen, wo immer möglich.

Bsp.: Hier sind einige Terme.

$$\begin{aligned} T_1 &= 3a + 4b, \\ T_2 &= c(3a + 4b), \\ T_3 &= \frac{3a + 4b}{7c - 18}, \\ T_4 &= 3a^5b^4 - 4a^3b^5, \\ T_5 &= a + \sqrt{b^2 + c^2}. \end{aligned} \tag{82}$$

T_3 ist ein **Bruchterm**, T_5 ist ein **Wurzelterm**.

Setzt man für die Variablen $a, b, c, ...$ Zahlen ein, so nimmt der Term einen **Wert** an. Dabei gilt grundsätzlich die Regel **"(Klammer vor) Punkt vor Strich"**.

Übungsaufgaben:

1. Bestimmen Sie die Werte, welche die Terme $T_1, ..., T_5$ des Beispiels annehmen, wenn für die Variablen a, b, bzw. c folgende Zahlen eingesetzt werden,

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = 4. \tag{83}$$

Bei vielen Termen dürfen gewisse Zahlen **nicht eingesetzt** werden:
• Der **Nenner eines Bruchterms** darf nicht den Wert 0 annehmen.
• Der **Radikand eines Wurzelterms** darf nicht negativ werden.
Man sagt, der Term sei für die entsprechenden Werte der Variablen **nicht definiert**.

Bsp.: (1) Im obigen Beispiel ist T_3 für den Wert $c = \frac{18}{7}$ **nicht definiert**, denn

$$c = \frac{18}{7} \qquad \Leftrightarrow \qquad 7c = 18 \qquad \Leftrightarrow \qquad 7c - 18 = 0. \tag{84}$$

(2) T_5 ist für alle Werte $a, b, c \in \mathbb{R}$ definiert, da der Radikand $a^2 + b^2$ immer ≥ 0 bleibt.
(3) Dagegen ist der Wurzelterm

$$T_6 = \sqrt{5a - 7} \tag{85}$$

für Werte $a < \frac{7}{5}$ **nicht definiert**, denn

$$a < \frac{7}{5} \qquad \Leftrightarrow \qquad 5a < 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad 5a - 7 < 0. \tag{86}$$

Übungsaufgaben:

1. Für welche Werte von a bzw. b ist folgender Term **nicht definiert**?

$$T_7 = \frac{\sqrt{b - 3}}{2a + 5}. \tag{87}$$

2.2 Äquivalenz von Termen

Wir betrachten zwei Terme mit den gleichen Variablen a und b

$$\begin{aligned} T_1 &= (a+b)^2, \\ T_2 &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned} \tag{88}$$

Setzt man in beiden Termen $a = 1$ und $b = 2$, so nehmen sie den gleichen Wert 9 an. Dies scheint sogar bei **beliebiger** Wahl der Werte von a und b der Fall zu sein:

$a = ...$	1	1	2	2	-5	10
$b = ...$	2	3	3	-3	3	20
$T_1 = ...$	9	16	25	1	4	900
$T_2 = ...$	9	16	25	1	4	900

Beide Terme scheinen also "äquivalent" zu sein:

Def.: Zwei Terme T_1 und T_2 mit gleichen Variablen $a, b, c, ...$ heißen **äquivalent**, wenn sie immer dann gleiche Werte annehmen, sobald für jede einzelne dieser Variablen jeweils in beiden Termen die gleiche Zahl eingesetzt wird.

FRAGE: Wie kann man erkennen, ob zwei gegebene Terme äquivalent sind ?

Um die **ANTWORT** direkt nach der **Definition** zu finden,
müsste man in beide Terme jeweils **unendlich viele** verschiedene Zahlen einsetzen.

Daher brauchen wir eine **elegantere Methode**:
Um direkt mit T_2 vergleichen zu können, multiplizieren wir T_1 aus,

$$\begin{aligned} T_1 &= (a+b)(a+b) \\ &= (a+b)a + (a+b)b, \end{aligned} \tag{89}$$

wobei wir das **Distributivgesetz** $x(y+z) = xy + xz$ angewandt haben.
Erneute Anwendung dieses Gesetzes (weiteres "Ausmultiplizieren") liefert

$$\begin{aligned} T_1 &= (a^2 + ba) + (ab + b^2) \\ &= \quad a^2 + 2ab + b^2 \quad = T_1'. \end{aligned} \tag{90}$$

Der neue Term T_1' ist offenbar identisch mit T_2.
Da sich bei den gemachten Umformungen die möglichen Werte nicht ändern, welche der Term beim Einsetzen von Zahlen annimmt, ist also T_2 tatsächlich **äquivalent** zu T_1.

2.3 Termumformungen

Def.: Unter einer **Umformung** eines Terms T_1 verstehen wir
die (systematische) Konstruktion eines zu T_1 **äquivalenten** Terms T_1'.

Das Ziel einer Termumformung ist entweder,
- daß T_1' eine einfachere Form hat als T_1 oder
- daß T_1' sich (besser als T_1) mit einem anderen Term T_2 vergleichen läßt.

Abkürzungen:
K-Gesetz = Kommutativgesetz: $a+b \;=\; b+a$ bzw. $ab \;=\; ba$,
A-Gesetz = Assoziativgesetz: $(a+b)+c \;=\; a+(b+c)$ bzw. $(ab)c \;=\; a(bc)$,
D-Gesetz = Distributivgesetz: $a(b+c) \;=\; ab+ac$.

2.3.1 Kommutativgesetz (+): "Umstellen"

Mit dem K-Gesetz $x+y=y+x$ oder, allgemeiner,

$$\begin{aligned} x+y+z &= x+z+y \\ &= y+x+z \\ &= ..., \end{aligned} \tag{91}$$

lassen sich "gleichartige" Summanden nebeneinander stellen,

$$\begin{aligned} T &= 2b\,+\,5a\,+\,6b\,+\,4a \\ &= \underbrace{5a\,+\,4a}\,+\,\underbrace{2b\,+\,6b}. \end{aligned} \tag{92}$$

Nun kann man zusammenfassen, und erhält den einfacheren Term

$$T' \;=\; 9a\,+\,8b. \tag{93}$$

Bem.: Strenggenommen haben wir zuletzt A- und D-Gesetz angewandt,

$$\begin{aligned} T &= (5a\,+\,4a)\,+\,(2b\,+\,6b) \\ &= (5+4)a\,+\,(2+6)b. \end{aligned} \tag{94}$$

Vorzeichenregel: Treten Minuszeichen auf, etwa in

$$T_1 \;=\; 6a\,+\,5b\,-\,4a\,-\,8b, \tag{95}$$

so beachten wir: **Subtraktion** $a-b$ entspricht **Addition** der Gegenzahl $-b$,

$$a\,-\,b \;:=\; a\,+\,(-b). \tag{96}$$

Daher kann man T_1 mit dem K-Gesetz umformen,

$$\begin{aligned} T_1 &= 6a\,+\,5b\,+\,(-4a)\,+\,(-8b) \\ &= \underbrace{6a\,+\,(-4a)}\,+\,\underbrace{5b\,+\,(-8b)} \\ &= (6a\,-\,4a)\,+\,(5b\,-\,8b) \\ &= 2a\,+\,(-3b) \\ &= 2a\,-\,3b. \end{aligned} \tag{97}$$

Nach einiger Übung geht dies auch schneller,

$$\begin{aligned} 6a\,+\,5b\,-\,4a\,-\,8b &= (6a\,-\,4a)\,+\,(5b\,-\,8b) \\ &= 2a\,-\,3b. \end{aligned} \tag{98}$$

2.3.2 Distributivgesetz: "Ausmultiplizieren" oder "Ausklammern"

Ein mehreren Summanden gemeinsamer Faktor läßt sich **ausklammern**,

$$ab + ac = a(b + c). \tag{99}$$

Ein Produkt mit einer Summe läßt sich **ausmultiplizieren**,

$$a(b + c) = ab + ac. \tag{100}$$

In beiden Fällen handelt es sich um das gleiche **D-Gesetz**.

Bsp. 1: Die Terme $15ab$ und $40bc$ haben den **gemeinsamen Faktor** $5b$,

$$\begin{aligned} 15ab &= 3 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 5b \cdot 3a, \\ 40bc &= 8 \cdot 5 \cdot b \cdot c = 5b \cdot 8c. \end{aligned} \tag{101}$$

(Hier haben wir stillschweigend das K-Gesetz $(\cdot)$ angewandt!)
Folglich kann man bei ihrer Summe **ausklammern**

$$\begin{aligned} 15ab + 40bc &= 5b \cdot 3a + 5b \cdot 8c \\ &= 5b(3a + 8c). \end{aligned} \tag{102}$$

Durch **Ausmultiplizieren** erhält man den Term $15ab + 40bc$ zurück.

Treten beim **Ausmultiplizieren** mehrere Summen auf,
so ergibt sich die Regel **"jeder (Summand) mit jedem"**, etwa

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= (ac+ad) + (bc+bd) \\ &= ac + ad + bc + bd. \end{aligned} \tag{103}$$

Bsp. 2: Ein Beispiel mit **Minuszeichen** ist

$$\begin{aligned} (6a-5b)(-3a+8b) &= \Big[6a + (-5b)\Big]\Big[(-3a) + 8b\Big] \\ &= 6a(-3a) + 6a \cdot 8b + (-5b)(-3a) + (-5b)8b \\ &= -18a^2 + \underbrace{48ab + 15ba} - 40b^2 \\ &= -18a^2 + 63ab - 40b^2. \end{aligned} \tag{104}$$

Nach einiger Übung geht dies auch schneller,

$$\begin{aligned} (6a-5b)(-3a+8b) &= -18a^2 + \underbrace{48ab + 15ab} - 40b^2 \\ &= -18a^2 + 63ab - 40b^2. \end{aligned} \tag{105}$$

Auflösen von Klammern: Für die Gegenzahl gilt $-c = (-1) \cdot c$, also folgt etwa

$$\begin{aligned} -(4a - 3b) &= (-1) \cdot (4a - 3b) \\ &= (-1) \cdot 4a + (-1) \cdot (-3b) \\ &= -4a + 3b, \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned} (9a + 5b) - (4a - 3b) &= (9a + 5b) + \big[-(4a - 3b)\big] \\ &= 5a + 8b. \end{aligned} \tag{107}$$

2.3.3 Die binomischen Formeln

Diese sind drei wichtige Spezialfälle des Terms $(a+b)(c+d)$, Gl. (103),

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, && (108) \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, && (109) \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2. && (110) \end{aligned}$$

Bsp. 1: Veranschaulichung durch Flächen von Quadraten und Rechtecken.

Bsp. 2: Näherungsweise gilt $\sqrt{5} \approx 2.236$ und $\sqrt{7} \approx 2.646$, also

$$\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) \approx 4.882 \cdot 0.410 \approx 2.002. \tag{111}$$

Exakt gilt

$$\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 7-5 = 2. \tag{112}$$

Die binomischen Formeln werden meistens **von rechts nach links** angewandt:

Bsp. 3 (Faktorisierung): Häufig möchte man einen Term in ein **Produkt** umformen (etwa in Zähler und Nenner von Bruchtermen, s. Abschnitt 2.3.4),

$$\begin{aligned} 49y^2 - 16x^2 &= 7 \cdot 7 \cdot y \cdot y - 4 \cdot 4 \cdot x \cdot x \\ &= (7y)^2 - (4x)^2 \\ &= (7y-4x)(7y+4x), && (113) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18a^2 + 24a + 8 &= 2(9a^2 + 12a + 4) \\ &= 2\left[(3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2 + 2^2\right] \\ &= 2(3a + 2)^2. && (114) \end{aligned}$$

Bsp. 4 (Quadratische Ergänzung): Für welche Werte von x nimmt der Term

$$T = x^2 - 6x + 5 \tag{115}$$

den Wert $T=0$ an ?
Um dies herauszufinden, addieren wir 4 (warum 4 ?) und subtrahieren es sofort wieder,

$$\begin{aligned} T &= (x^2 - 6x + 9) - 4 \\ &= (x-3)^2 - 4. && (116) \end{aligned}$$

Wir erreichen also $T=0$, sobald x folgender Bedingung genügt,

$$(x-3)^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x-3 \in \{-2, 2\} \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \{1, 5\}. \tag{117}$$

Das Problem hat also **zwei Lösungen**, $x=1$ und $x=5$ (Probe durch Einsetzen !).
Außerdem zeigt unsere Strategie, daß es **keine weiteren** Lösungen geben kann.
Bem.: Wir haben somit eine **quadratische Gleichung** gelöst (s. Abschnitt 3).

2.3.4 Bruchterme

(a) Multiplikation und Division

Ein Produkt zweier Bruchterme wird gebildet wie ein Produkt von Zahlenbrüchen,

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+4} &= \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)} \\ &= \frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}. \end{aligned} \tag{118}$$

Division durch einen Bruch entspricht Multiplikation mit dem Kehrbruch.

(b) Kürzen

In einem **Zahlenbruch** q zerlegt man Zähler und Nenner in **Primfaktoren**,

$$q = \frac{180}{162} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 3^4}. \tag{119}$$

Durch **Kürzen** gemeinsamer Faktoren (genauer: des ggT) wird der Bruch vereinfacht,

$$q = \frac{2 \cdot 5}{3^2}, \tag{120}$$

und man sieht sofort: $q = \frac{10}{9}$.

Auch in **Bruchtermen** T lassen sich Zähler und Nenner häufig **faktorisieren**, z.B.:

$$T = \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)(x+3)}{(x+3)(x-3)}. \tag{121}$$

Der in Zähler und Nenner auftretende Faktor $(x+3)$ kann gekürzt werden,

$$T' = \frac{x+3}{x-3}. \tag{122}$$

Der neue Bruchterm T' ist **im wesentlichen**[1] **äquivalent** zu T.

(c) Erweitern

Um zwei Bruchterme zu **addieren**, muß man sie **auf gleiche Nenner bringen**.
Dies geschieht wie bei Zahlenbrüchen durch geeignetes **Erweitern**,

$$\begin{aligned} \frac{2+3a}{a+1} + \frac{b+5}{a+3} &= \frac{(2+3a)(a+3)}{(a+1)(a+3)} + \frac{(b+5)(a+1)}{(a+3)(a+1)} \\ &= \frac{(2+3a)(a+3) \ + \ (b+5)(a+1)}{(a+1)(a+3)} \\ &= \frac{3a^2+ab+16a+b+11}{(a+1)(a+3)}. \end{aligned} \tag{123}$$

Ein reines Produkt (hier im Nenner) läßt man besser stehen.

[1] **Allerdings:** T ist für $x = 3$ **und** für $x = -3$ nicht definiert, T' dagegen nur für $x = 3$.

3 Gleichungen

3.1 Definition

3.1.1 Beispiel

Es seien L ein Lkw, P ein Pkw und A eine Autobahn-Raststätte.
• L fährt in A um 8:00 Uhr los, mit (konstanter) Geschwindigkeit 90 km/h.
• P fährt in A um 8:30 Uhr los, mit (konstanter) Geschwindigkeit 150 km/h.
• *Zu welcher Uhrzeit t und an welchem Ort x wird L von P überholt ?*
Wir messen x (von A aus) in Kilometern, t in Stunden ("$t = 8.5$" bedeutet "8:30 Uhr"):
L erreicht zur Zeit $t \geq 8.0$ den Ort

$$x_L \;=\; 90 \cdot (t - 8.0), \tag{124}$$

P erreicht zur Zeit $t \geq 8.5$ den Ort

$$x_P \;=\; 150 \cdot (t - 8.5). \tag{125}$$

Wir berechnen x_L und x_P für einige Zeiten $t \geq 8.5$:

t (in Std.)	8.5	8.8	9.0	9.2	9.4
Uhrzeit	8:30	8:48	9:00	9:12	9:24
x_L (in km)	45	72	90	108	126
x_P (in km)	0	45	75	105	135

Wir sehen: L wird von P etwa um 9:12 Uhr ($t \approx 9.2$) am Ort $x \approx 108$ (km) überholt.

Genauere Zahlen findet man schneller mit einem x, t-Diagramm:

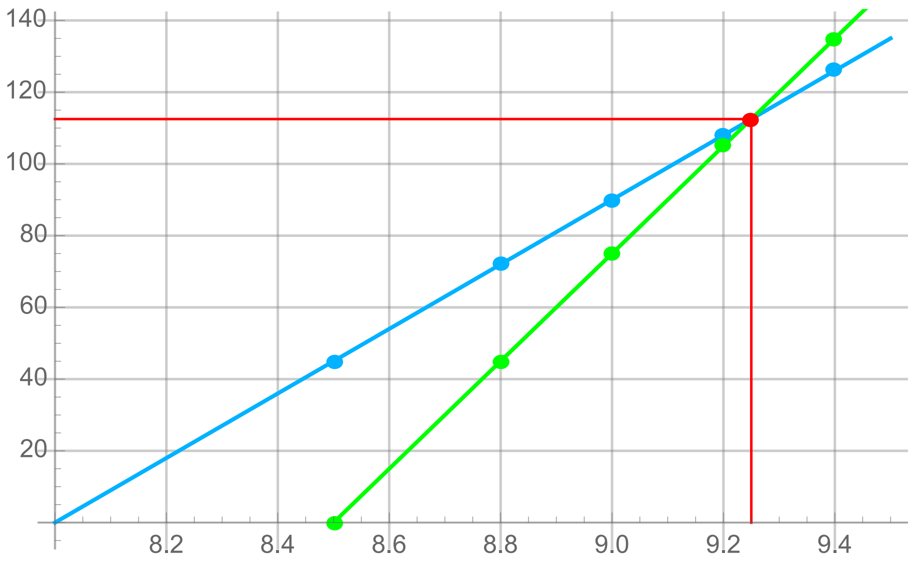


Figure 1: x, t-Diagramm (Blau: L, grün: P).

Wir wollen die **exakte Lösung** finden, ohne ein Diagramm zeichnen zu müssen:

Zum gefragten Zeitpunkt t muß offenbar gelten: $x_P = x_L$. Wir setzen also

$$150 \cdot (t - 8.5) \;=\; 90 \cdot (t - 8). \tag{126}$$

Dies ist eine **Gleichung** für die Unbekannte t.

3.1.2 Lösungsmenge einer Gleichung

Bsp. 1: Setzt man in der Gleichung (126) für die Unbekannte t den Wert $t = t_1$ ein,

$$t_1 \;=\; 9.25. \tag{127}$$

so nehmen beide Seiten den **gleichen Wert** 112.5 an.
Man nennt daher $t_1 = 9.25$ eine **Lösung** dieser Gleichung.
• *L wird also von P um 9:15 Uhr ($t = 9.25$) am Ort $x = 112.5$ (km) überholt.*
Wie wir sehen werden, hat diese Gleichung nur diese **einzige** Lösung.

Bsp. 2: Hier ist eine kompliziertere Gleichung mit der Unbekannten x,

$$x^3 \;-\; 10\,x^2 \;+\; 29\,x \;=\; 20. \tag{128}$$

Jetzt sieht man (wieder durch Einsetzen), daß es **drei verschiedene** Lösungen gibt,

$$x_1 \;=\; 1, \qquad x_2 \;=\; 4, \qquad x_3 \;=\; 5. \tag{129}$$

Wie man zeigen kann, gibt es **keine weiteren** Lösungen.

Def.: Unter der **Grundmenge** $\mathbb{G}$ einer Gleichung versteht man die Menge aller Zahlen, welche zum Einsetzen für die Unbekannte **zugelassen** werden.[2]
Die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ enthält genau jene Elemente von $\mathbb{G}$, welche **Lösungen** sind, bei deren Einsetzen also beide Seiten der Gleichung den gleichen Wert annehmen.

Die Gleichung aus Bsp. 2 (mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$) hat also die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \;=\; \{1, 4, 5\}. \tag{130}$$

Dagegen gilt für die Gleichung (126) aus Abschnitt 3.1.1 (mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

$$\mathbb{L} \;=\; \{9.25\} \;\equiv\; \left\{\tfrac{37}{4}\right\}. \tag{131}$$

Es gibt auch Gleichungen, z.B.: $0 \cdot x \;=\; 1$, die **gar keine** Lösung haben,

$$\mathbb{L} \;=\; \{\}. \tag{132}$$

Frage: Wie kann man die Lösungen einer Gleichung, also die gesamte Lösungsmenge $\mathbb{L}$, **systematisch** bestimmen?

[2] Wenn keine weitere Einschränkung verlangt wird, umfaßt $\mathbb{G}$ alle Zahlen, für welche die in der Gleichung auftretenden Terme definiert sind.

3.1.3 Äquivalenzumformungen

Um $\mathbb{L}$ zu bestimmen, bringt man die Gleichung auf eine **einfachere Form**, welche die gleiche Lösungsmenge $\mathbb{L}$ hat.

Def.: Eine Umformung einer Gleichung, bei der die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ sich nicht ändert, heißt **Äquivalenzumformung** (ÄU).

Satz: Die wichtigsten ÄU sind:
(1) Umformung des Terms auf der linken oder rechten Seite in einen äquivalenten Term.
(2) Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten.
(3) Multiplikation oder Division des gleichen Terms, der $\neq 0$ sein muß, auf beiden Seiten.

Anwendung des Satzes auf unsere Gleichung (126):
(1) Umformung beider Seiten nach dem Distributivgesetz,

$$150\,t \;-\; 1275 \;=\; 90\,t \;-\; 720. \tag{133}$$

(2) Addition des Terms $720 \;-\; 90\,t$ auf beiden Seiten,

$$60\,t \;-\; 555 \;=\; 0. \tag{134}$$

(3) Division beider Seiten durch $15 \neq 0$ ("Kürzen"),

$$4\,t \;-\; 37 \;=\; 0. \tag{135}$$

Unsere Gleichung (126) ist also äquivalent zu dieser viel einfacheren Gleichung oder

$$\begin{aligned} 4\,t &= 37 \;\Big|\; :4 \\ t &= \tfrac{37}{4}, \end{aligned} \tag{136}$$

mit der offensichtlichen Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{\, \tfrac{37}{4} \,\right\} \;\equiv\; \left\{\, 9.25 \,\right\}. \tag{137}$$

3.2 Lineare Gleichungen

Def.: Eine **lineare Gleichung** mit der Unbekannten x hat allgemein die Form

$$a\,x \;+\; b \;=\; 0, \tag{138}$$

mit zwei gegebenen Zahlen ("**Koeffizienten**") $a \neq 0$ und b.

Bem.: Allgemeiner nennt man eine Gleichung linear,
wenn sie durch ÄU auf die Form $ax + b = 0$ gebracht werden kann.

Bsp. 1: Gl. (126) aus der Einführung ist linear, da sie äquivalent ist zu

$$4\,t \;-\; 37 \;=\; 0 \qquad\qquad (a = 4, \quad b = -37). \tag{139}$$

Satz: Die **lineare Gleichung** $a\,x\;+\;b\;=\;0$ (mit $a \neq 0$) hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{-\tfrac{b}{a}\right\}, \tag{140}$$

also die **einzige Lösung** $x_1 \;=\; -\frac{b}{a}$.
Beweis: Subtrahiere auf beiden Seiten b, dividiere dann beide Seiten durch $a \neq 0$.

Bsp. 2: In der Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \;=\; \frac{1}{4} \;\Big|\cdot 12 \tag{141}$$

multiplizieren wir beide Seiten mit 12,

$$6x + 4 \;=\; 3 \;\Big|-3 \tag{142}$$

und subtrahieren dann von beiden Seiten 3,

$$6x + 1 \;=\; 0. \tag{143}$$

Dies ist eine lineare Gleichung mit $a = 6$ und $b = 1$, also mit Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{6}\}$.
Probe durch Einsetzen!

Bsp. 3: Auch die Gleichung

$$\tfrac{2}{3}x - \frac{2x+3}{4} \;=\; \tfrac{1}{12} \tag{144}$$

ist linear: Multiplikation mit 12 ergibt

$$\begin{aligned} 8\,x - 3(2x+3) &= 1 \\ 8\,x - 6\,x - 9 &= 1 \\ 2\,x - 10 &= 0, \end{aligned} \tag{145}$$

mit $\mathbb{L} = \{5\}$.
Probe durch Einsetzen!

Bsp. 4: Die **Bruchgleichung**

$$\frac{5x-7}{x-3} \;=\; 2 \tag{146}$$

hat die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
Wir multiplizieren beide Seiten mit $(x-3) \neq 0$,

$$\begin{aligned} 5x - 7 &= 2(x-3) \\ &= 2x - 6. \end{aligned} \tag{147}$$

Addition von $6 - 2x$ liefert wieder eine lineare Gleichung,

$$3x - 1 \;=\; 0, \tag{148}$$

mit $\mathbb{L} = \{\frac{1}{3}\}$.
Dieses $\mathbb{L}$ ist auch die Lösungsmenge der ursprünglichen Bruchgleichung, da $\frac{1}{3} \in \mathbb{G}$.
Probe durch Einsetzen!

3.3 Quadratische Gleichungen

Def.: Eine **quadratische Gleichung** mit der Unbekannten x hat allgemein die Form

$$a\,x^2 \;+\; b\,x \;+\; c \;=\; 0, \tag{149}$$

mit drei gegebenen Zahlen ("**Koeffizienten**") $a \neq 0$, b und c.

Bsp. 1: In der quadratischen Gleichung (quGl) mit $a = 1$, $b = 0$ und $c = -25$,

$$x^2 \;-\; 25 \;=\; 0, \tag{150}$$

erkennen wir eine der **binomischen Formeln**,

$$(x+5)(x-5) \;=\; x^2 \;-\; 5^2. \tag{151}$$

Die Gleichung ist also äquivalent zu

$$(x+5)(x-5) \;=\; 0. \tag{152}$$

In dieser **faktorisierten Form** wird die linke Seite (LS) genau dann $= 0$,
wenn einer der beiden Faktoren $= 0$ ist,

$$\mathbb{L} \;=\; \{-5, 5\}. \tag{153}$$

Bsp. 2: In der quGl

$$x^2 \;+\; 6x \;+\; 9 \;=\; 0 \tag{154}$$

erkennen wir eine andere **binomische Formel**,

$$(x+3)^2 \;=\; x^2 \;+\; 2 \cdot 3 \cdot x \;+\; 3^2. \tag{155}$$

Die Gleichung ist also äquivalent zu

$$(x+3)(x+3) \;=\; 0, \tag{156}$$

und es gibt nur eine Lösung,

$$\mathbb{L} \;=\; \{-3\}. \tag{157}$$

Bsp. 3: In der quGl

$$x^2 \;+\; 6x \;-\; 7 \;=\; 0 \tag{158}$$

machen wir eine **quadratische Ergänzung** (Addition der Zahl 16 auf beiden Seiten),

$$x^2 \;+\; 6x \;+\; 9 \;=\; 16. \tag{159}$$

Die Gleichung ist also äquivalent zu

$$(x+3)^2 \;=\; 16. \tag{160}$$

Soll $u^2 = 16$ sein, so muß gelten: $u = 4$ oder $u = -4$,

$$x+3 \;=\; 4 \qquad \text{oder} \qquad x+3 \;=\; -4. \tag{161}$$

Es gibt also zwei Lösungen,

$$\mathbb{L} \;=\; \{1, -7\}. \tag{162}$$

Probe durch Einsetzen!

3.4 Ungleichungen

Bsp. 1a: Eine besonders einfache Ungleichung ist

$$3\,x \;-\; 8 \;>\; 7. \tag{163}$$

Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ gehört zur **Lösungsmenge** der Ungleichung, $x_0 \in \mathbb{L}$,
wenn diese eine wahre Aussage ergibt, sobald x_0 für die Unbekannte x eingesetzt wird.

• Die Zahl $x_1 = 3$ gehört offenbar nicht zur Lösungsmenge, $x_1 \notin \mathbb{L}$, denn

$$3\,x_1 \;-\; 8 \;=\; 1, \qquad \text{also} \qquad 3\,x_1 \;-\; 8 \;<\; 7. \tag{164}$$

• Die Zahl $x_2 = 8$ gehört dagegen dazu, $x_2 \in \mathbb{L}$, denn

$$3\,x_2 \;-\; 8 \;=\; 16, \qquad \text{also} \qquad 3\,x_2 \;-\; 8 \;>\; 7. \tag{165}$$

Eine systematische Bestimmung von $\mathbb{L}$ erfolgt auch bei Ungleichungen durch ÄU.
Diese sind jedoch nicht genau dieselben wie bei Gleichungen:

Satz: Die wichtigsten ÄU bei **Ungleichungen** sind:
(0) Vertauschung beider Seiten **und** Umkehrung des Ungleichheitszeichens (UZ).
(1) Umformung des Terms auf der linken oder rechten Seite in einen äquivalenten Term.
(2) Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten.
(3) Multiplikation oder Division des gleichen Terms, der $\neq 0$ sein muß, auf beiden Seiten, wobei das UZ **umzukehren ist**, wenn dieser Term **negative** Werte annimmt.

Bem.: Man beachte die Besonderheit bei Regel (3), die bei Gleichungen nicht auftritt!
Als Beispiel betrachten wir die Relation "$4 > 3$". Multiplikation mit 2 ergibt

$$8 \;>\; 6 \tag{166}$$

Multipliziert man dagegen beide Seiten (von "$4 > 3$") mit der **negativen Zahl** -2,
so muß zugleich das UZ umgekehrt werden, um eine korrekte Relation zu erhalten,

$$-8 \;<\; -6. \tag{167}$$

Zur Erinnerung: 8°C ist wärmer als 6°C, während −8°C kälter ist als 6°C.
Man bedenke auch die Positionen der Zahlen −8, −6, 6 und 8 auf der Zahlengerade!

Bsp. 1b: (2) In Bsp. 1a addieren wir auf beiden Seiten die Zahl 8,

$$3\,x \;>\; 15, \tag{168}$$

(3) und dividieren beide Seiten durch $3 > 0$,

$$x \;>\; 5. \tag{169}$$

Die Lösungsmenge besteht daher aus **unendlich vielen Zahlen**,

$$\mathbb{L} \;=\; \Big\{ x \in \mathbb{R} \,\Big|\, x > 5 \Big\}. \tag{170}$$

Bsp. 2: Wir betrachten die Ungleichung

$$3 \;-\; 4\,x \;>\; -9. \tag{171}$$

(2) Subtraktion von 3 auf beiden Seiten ergibt

$$-4\,x \;>\; -12. \tag{172}$$

(3) Wenn wir nun durch $-4 < 0$ dividieren, müssen wir ">" zu "<" **umkehren**,

$$x \;<\; \frac{-12}{-4} \;\equiv\; 3. \tag{173}$$

Die Lösungsmenge ist jetzt also

$$\mathbb{L} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < 3\right\}. \tag{174}$$

Probe durch Einsetzen!

Bsp. 3: Bei der Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-3} \;<\; 4 \qquad\qquad (\mathbb{G} = \mathbb{R}\backslash\{3\}) \tag{175}$$

sind zwei Fälle zu unterscheiden.
<u>1. Fall, $x - 3 > 0$:</u> $x > 3$.
Jetzt wird bei Mult. mit $x - 3$ das **UZ nicht umgekehrt**,

$$\begin{aligned} x \;+\; 3 \;&<\; 4(x-3) \\ x \;+\; 3 \;&<\; 4x \;-\; 12 \;\Big|\; -\, 4x \;\Big|\; -\, 3 \\ -3x \;&<\; -15 \;\Big|\; : (-3) \\ x \;&>\; 5. \end{aligned} \tag{176}$$

Der erste Teil der Lösungsmenge ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 \;&=\; \{x \in \mathbb{G} \mid x > 3 \quad \text{und} \quad x > 5\} \\ &=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}. \end{aligned} \tag{177}$$

<u>2. Fall, $x - 3 < 0$:</u> $x < 3$.
Jetzt wird bei Mult. mit $x - 3$ das **UZ umgekehrt**,

$$\begin{aligned} x \;+\; 3 \;&>\; 4(x-3) \\ x \;+\; 3 \;&>\; 4x \;-\; 12 \;\Big|\; -\, 4x \;\Big|\; -\, 3 \\ -3x \;&>\; -15 \;\Big|\; : (-3) \\ x \;&<\; 5. \end{aligned} \tag{178}$$

Der zweite Teil der Lösungsmenge ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 \;&=\; \{x \in \mathbb{G} \mid x < 3 \quad \text{und} \quad x < 5\} \\ &=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}. \end{aligned} \tag{179}$$

Die gesamte Lösungsmenge ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{L} \;&=\; \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \\ &=\; \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \quad \text{oder} \quad x > 5\} \\ &=\; \mathbb{R}\backslash[3, 5]. \end{aligned} \tag{180}$$

Probe durch Einsetzen von $x = -2, 0, 2, 4, 5, 6$!

4 Gleichungssysteme

4.1 Die xy-Ebene und die Menge $\mathbb{R}^2$

Zeichnet man auf einer Ebene eine x-Achse und, dazu senkrecht, eine y-Achse, jeweils mit Skalenstrichen, so werden jedem Punkt P zwei Koordinaten x bzw. y zugeordnet,

$$P \;=\; P(x|y). \tag{181}$$

Die Koordinaten einiger Punkte der folgenden Abbildung sind

$$A(2|5), \quad B(-6|3), \quad C(-5|-4), \quad D(4|-6). \tag{182}$$

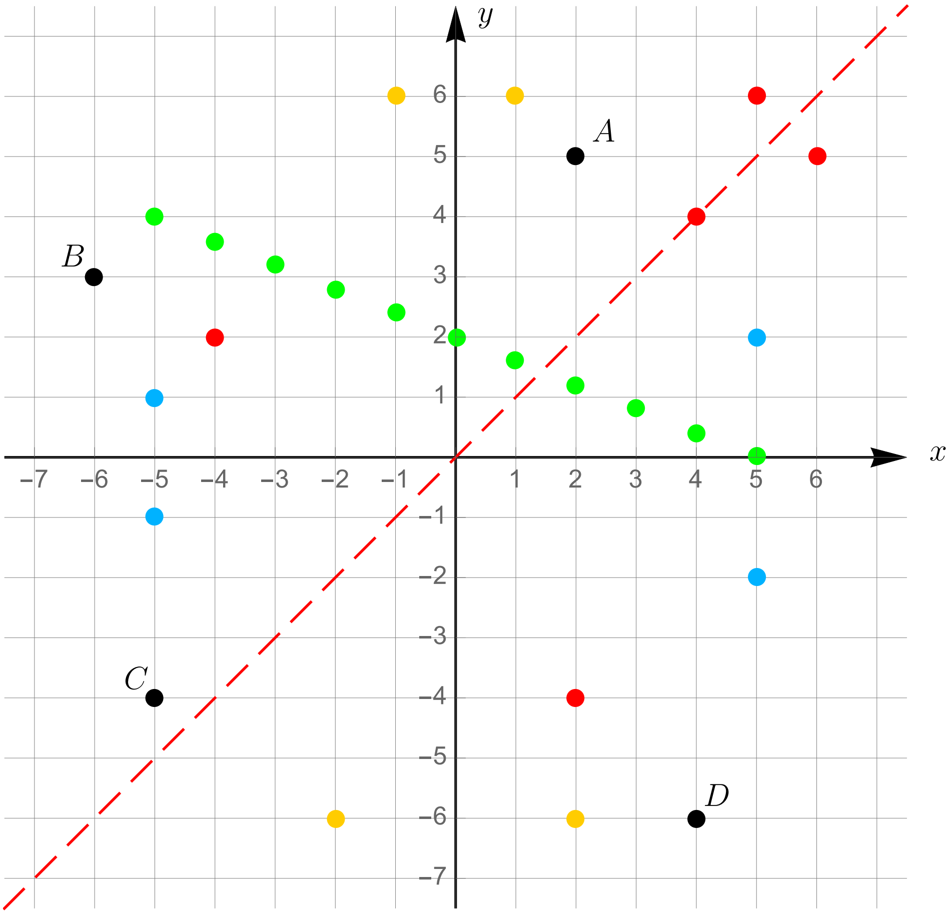


Figure 2: xy-Ebene mit x-Achse, y-Achse, der Winkelhalbierenden und einigen Punkten.

Def.: Die Menge der geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen wird als $\mathbb{R}^2$ bezeichnet,

$$\mathbb{R}^2 \;=\; \big\{(x, y) \;\big|\; x \in \mathbb{R}, \;\; y \in \mathbb{R}\big\}. \tag{183}$$

Sie läßt sich mit der Menge aller Punkte $P(x|y)$ einer Ebene identifizieren.

Übungsaufgaben:

1. Gegeben sei der Punkt $Q(a|b)$ mit den Koordinaten $x = a$ und $y = b$.
   Welche Lage relativ zu Q haben die folgenden vier Punkte?
   $$R(a|-b), \qquad S(-a|b), \qquad T(-a|-b), \qquad U(b|a). \tag{184}$$
2. Ein Quadrat hat die Eckpunkte $V(1|2)$ und $W(5|4)$. Bestimmen Sie zwei weitere Eckpunkte, wenn V und W (a) benachbart sind bzw. (b) einander gegenüberliegen.

4.2 Geradengleichung im $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten eine (lineare) Gleichung **mit zwei Unbekannten** x und y,

$$2x + 5y = 10. \tag{185}$$

Def.: Unter der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ einer Gleichung mit zwei Unbekannten x und y versteht man die Menge aller geordneten Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, bei deren Einsetzen beide Seiten der Gleichung den gleichen Wert annehmen, $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^2$.

Bsp.: Für obige Gleichung $2x + 5y = 10$ können wir $\mathbb{L}$ leicht konstruieren:
Zu **jedem** $x \in \mathbb{R}$ gibt es immer **genau ein** $y \in \mathbb{R}$, sodaß das Paar (x, y) zu $\mathbb{L}$ gehört.
Wählen wir etwa $x = 3$, so folgt für y die Bedingung (eine lineare Gleichung!)

$$6 + 5y = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 5y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.8. \tag{186}$$

Es gilt also $(3 \,|\, 0.8) \in \mathbb{L}$.
Wir bestimmen einige solcher Paare $(x|y) \in \mathbb{L}$,

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	3.2	2.8	2.4	2	1.6	1.2	0.8	0.4	0	-0.4	...

Die entsprechenden Punkte (grün in Abb. 7.4) der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegen auf einer **Gerade**, welche die y-Achse bei $y = 2$ und die x-Achse bei $x = 5$ schneidet.

Bem.: Im Fall $a, b, r \neq 0$ nimmt jede Gleichung der Art

$$a\,x + b\,y = r \tag{187}$$

nach Division beider Seiten durch r die Form $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1$ an, mit

$$x_0 = \frac{r}{a}, \qquad y_0 = \frac{r}{b}. \tag{188}$$

Satz: Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1 \tag{189}$$

ist die Menge der Koordinaten (x, y) aller Punkte $P(x|y)$ jener **Gerade**, welche
• die x-Achse bei $x = x_0$ und
• die y-Achse bei $y = y_0$ schneidet.

Bsp. 1: Wir dividieren obige Gleichung $2x + 5y = 10$ durch 10,

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1. \tag{190}$$

Die "Lösungsgerade" durchschneidet die Achsen also bei $x_0 = 5$ bzw. $y_0 = 2$.

Bsp. 2: Wir dividieren die Gleichung $3x + 4y = 5$ durch 5,

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{4}} = 1. \tag{191}$$

In diesem Fall liegen die Achsenschnittpunkte bei $x_0 = \frac{5}{3} \approx 1.667$ und bei $y_0 = \frac{5}{4} = 1.25$.

4.3 Lineare Gleichungssysteme

4.3.1 Zwei Unbekannte

Wir betrachten ein **System aus zwei linearen Gleichungen**,

$$a\,x + b\,y = r, \qquad (192)$$
$$c\,x + d\,y = s, \qquad (193)$$

für die beiden Unbekannten x und y.
Die Lösungsmengen der beiden **Einzelgleichungen** seien $\mathbb{L}_1$ bzw. $\mathbb{L}_2$.
Ein Zahlenpaar $(x|y)$ gehört genau dann zur Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des **Systems**, wenn es zu $\mathbb{L}_1$ **und** zu $\mathbb{L}_2$ gehört,

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2. \qquad (194)$$

Da $\mathbb{L}_1$ einer Gerade g_1 und $\mathbb{L}_2$ einer Gerade g_2 entspricht, so gibt es drei Fälle:
- Ist $g_1 = g_2$, so gilt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.
- Sind g_1 und g_2 parallel, mit $g_1 \neq g_2$, so gilt $\mathbb{L} = \{\}$.
- Schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt $(x_S|y_S)$, so gilt $\mathbb{L} = \{(x_S|y_S)\}$.

Bsp. 1: Frau A kauft 8 Äpfel und 5 Birnen für zusammen 8.00 EUR,

$$8\,x + 5\,y = 8 \qquad (\mathrm{I}). \qquad (195)$$

Die Einzelpreise x (Apfel) und y (Birne) lassen sich daraus nicht berechnen:
Möglich wären etwa $(x|y) = (0.45|0.88)$ oder $(0.50|0.80)$ oder $(0.55|0.72)$.
Herr B kauft im gleichen Laden 12 Äpfel und 10 Birnen für zusammen 14.00 EUR,

$$12\,x + 10\,y = 14 \qquad (\mathrm{II}). \qquad (196)$$

Nun haben wir ein System aus zwei Gleichungen (I) und (II) für x und y.
Jetzt können wir die Einzelpreise x und y berechnen.
Lösung des Gleichungssystems: Multipliziere (I) mit 2,

$$16\,x + 10\,y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 10\,y = 16 - 16\,x; \qquad (197)$$

setze in (II) ein,

$$12\,x + (16 - 16\,x) = 14 \quad \Leftrightarrow \quad 16 - 4\,x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4\,x; \qquad (198)$$

es folgt $x = 0.50$ und damit $y = \frac{1}{10} \cdot (16 - 16\,x) = 0.80$.

Bsp. 2: Hätte Herr B 24 Äpfel und 15 Birnen gekauft (und 24.00 EUR bezahlt),

$$24\,x + 15\,y = 24 \qquad (\mathrm{II}'), \qquad (199)$$

so könnten wir x und y nicht bestimmen, da Gl. (II′) keine zusätzliche Information liefert:
Sie geht durch eine ÄU (Multiplikation beider Seiten mit 3) aus Gl. (I) hervor.

4.3.2 Drei Unbekannte

Ein Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ aus **drei Zahlen**
entspricht einem Punkt $P(x|y|z)$ im **3D Raum**.

(a) Ebenengleichung

Ein lineare Gleichung mit **drei Unbekannten** x, y und z,

$$a\,x \;+\; b\,y \;+\; c\,z \;=\; r, \tag{200}$$

wird gelöst durch die Punkte $(x|y|z)$ einer **Ebene im 3D Raum**:

Satz: Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Gleichung

$$\frac{x}{x_0} \;+\; \frac{y}{y_0} \;+\; \frac{z}{z_0} \;=\; 1 \tag{201}$$

ist die Menge der Koordinaten (x, y, z) aller Punkte $P(x|y|z)$ jener **Ebene**, welche
• die x-Achse bei $x = x_0$,
• die y-Achse bei $y = y_0$ und
• die z-Achse bei $z = z_0$ schneidet.

Bsp.: Wir betrachten die Ebene E mit der Gleichung

$$6\,x \;+\; 3\,y \;+\; 4\,z \;=\; 12. \tag{202}$$

Nach Division beider Seiten durch 12 entsteht

$$\frac{x}{2} \;+\; \frac{y}{4} \;+\; \frac{z}{3} \;=\; 1. \tag{203}$$

E hat also mit den Achsen die Schnittpunkte (siehe Abb. 4)

$$A(2|0|0), \quad B(0|4|0), \quad C(0|0|3). \tag{204}$$

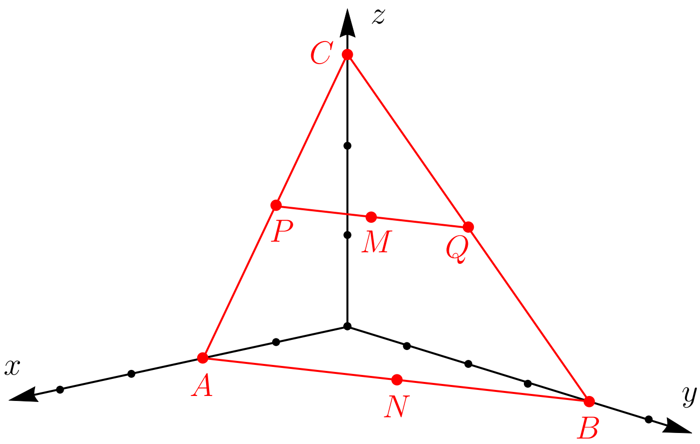


Figure 3: Die Punkte A, B, C, P, Q, M und N auf der Ebene E.

Weitere Punkte auf E sind

$$P(1|0|1.5), \quad Q(0|2|1.5), \quad M(0.5|1|1.5), \quad N(1|2|0). \tag{205}$$

(b) Gleichungssytem

Da sich drei Ebenen typischerweise in einem Punkt $P(x_S|y_S|z_S)$ schneiden (Ausnahmen?), so hat ein System aus drei linearen Gleichungen für drei Unbekannte x, y, z,

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= r, \\ d\,x + e\,y + f\,z &= s, \\ g\,x + h\,y + i\,z &= t, \end{aligned} \tag{206}$$

in der Regel eine einzige Lösung, $\mathbb{L} = \{\,(x_S, y_S, z_S)\,\}$.

Bsp. 1: Drei Kunden A, B und C kaufen im Obstladen jeweils unterschiedliche Mengen Äpfel, Birnen und Pfirsiche. ...

Bsp. 2:

$$\begin{aligned} 2\,x - y + 3\,z &= 1, \qquad (\mathrm{I}) \\ 3\,x + 4y + z &= 2, \qquad (\mathrm{II}) \\ -x - 2y + 3\,z &= 4. \qquad (\mathrm{III}) \end{aligned}$$

Schritt 1: Löse eine Gleichung (hier: I) nach einer Unbekannten (hier: y) auf,

$$y = 2\,x + 3\,z - 1. \qquad (\mathrm{I}') \tag{207}$$

Schritt 2: Setze das Resultat in die beiden anderen Gleichungen (II und III) ein,

$$\begin{aligned} 3\,x + 4(2x + 3z - 1) + z &= 2. \qquad (\mathrm{II}') \\ -x - 2(2x + 3z - 1) + 3\,z &= 4. \qquad (\mathrm{III}') \end{aligned}$$

Wir vereinfachen durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen,

$$\begin{aligned} 11\,x + 13\,z &= 6, \qquad (\mathrm{II}') \\ -5\,x - 3\,z &= 2. \qquad (\mathrm{III}') \end{aligned}$$

Somit haben wir das 3-3-System auf ein 2-2-System reduziert.
Dessen Lösung finden wir wie in Abschnitt 4.3.1,

$$x = -\frac{11}{8}, \qquad z = \frac{13}{8}. \tag{208}$$

Die dritte Unbekannte ergibt sich dann aus Gleichung (I′),

$$y = \frac{9}{8}. \tag{209}$$

4.3.3 Einfache nicht-lineare Systeme

Elastischer Stoß: Teilchen 1 (Masse $m_1 = 6$ kg) stößt mit der Geschwindigkeit $u = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zentral auf das vorher ruhende Teilchen 2 (Masse $m_2 = 4$ kg).
Die Geschwindigkeiten v (Teilchen 1) und w (Teilchen 2) **nach diesem Stoß** ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m_1\,v \;+\; m_2\,w \;&=\; m_1\,u\,, &\qquad &\text{(Impulserhaltung)}\\ \frac{m_1}{2}\,v^2 \;+\; \frac{m_2}{2}\,w^2 \;&=\; \frac{m_1}{2}\,u^2. &\qquad &\text{(Energieerhaltung)} \end{aligned}$$

Unterdrücken wir die Einheiten kg und $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, so lautet dieses System

$$\begin{aligned} 6\,v \;+\; 4\,w \;&=\; 30, &\qquad &\text{(I)}\\ 3\,v^2 \;+\; 2\,w^2 \;&=\; 75. &\qquad &\text{(II)} \end{aligned}$$

Es ist **nicht-linear**, da in Gl. (II) die Variablen v und w **quadratisch** eingehen.

Aus (I) finden wir nach wenigen Schritten

$$w \;=\; \tfrac{15}{2} - \tfrac{3}{2}\,v. \qquad \text{(I}'\text{)} \tag{210}$$

Durch Einsetzen in (II) erhalten wir eine **quadratische Gleichung** für v,

$$3\,v^2 \;+\; 2\cdot\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{3}{2}\,v\right)^2 \;=\; 75. \qquad \text{(II}'\text{)} \tag{211}$$

Ausmultiplizieren des Quadrats und Zusammenfassung gleichartiger Terme ergibt

$$\begin{aligned} \tfrac{15}{2}\,v^2 \;-\; 45\,v \;+\; \tfrac{75}{2} \;&=\; 0 \;\Big|\; \cdot\tfrac{2}{15}\\ v^2 \;-\; 6\,v \;+\; 5 \;&=\; 0\\ (v-1)(v-5) \;&=\; 0, \end{aligned} \tag{212}$$

wobei wir im letzten Schritt den Satz von Vieta angewandt haben.
Für v erhalten wir also zwei Lösungen,

$$v_1 \;=\; 1, \qquad v_2 \;=\; 5. \tag{213}$$

Nach Gl. (I$'$) sind dann die entsprechenden Lösungen für w

$$w_1 \;=\; 6, \qquad w_2 \;=\; 0. \tag{214}$$

Das zweite Lösungspaar $(v_2, w_2) = (5, 0)$ beschreibt die Situation **ohne Stoß**, bei der natürlich Impuls und Energie trivialerweise erhalten bleiben.
Interessant ist nur das erste Lösungspaar $(v_1, w_1) \equiv (v, w) = (1, 6)$ oder, mit Einheiten,

$$v \;=\; 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad\qquad w \;=\; 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{215}$$

5 Anwendungen

5.1 Produkt- und Verhältnisgleichungen

5.1.1 Direkte Proportionalität

Bsp. 1: Ein Stück der Länge $\ell_1 = 10$ m eines gewissen Metalldrahtes habe die Masse $m_1 = 4$ kg. Dann hat ein anderes Stück der Länge $\ell_2 = 25$ m des gleichen Drahtes die Masse $m_2 = 10$ kg, denn es besteht offenbar die **Verhältnis-Beziehung**

$$m_2 : \ell_2 \;=\; m_1 : \ell_1. \tag{216}$$

In Worten: *Je größer m desto größer ℓ.*

Bem.: Zwei äquivalente Fassungen dieser Beziehung sind

$$\ell_2 : m_2 \;=\; \ell_1 : m_1, \qquad\qquad \ell_2 : \ell_1 \;=\; m_2 : m_1. \tag{217}$$

Def. 1: Zwei (voneinander abhängige) Größen a und b heißen **(direkt) proportional** zueinander, wenn ihre Werte in verschiedenen Fällen stets folgende Beziehung erfüllen,

$$a_1 : b_1 \;=\; a_2 : b_2. \tag{218}$$

Typische Fragestellung:
Ein Stück der Masse $m_1 = 5$ kg eines Drahtes habe die Länge $\ell_1 = 18$ m.
Wie lang (ℓ_2) ist dann ein anderes Stück (vom selben Draht) der Masse $m_2 = 12$ kg?
• Von den vier Werten m_1, ℓ_1, m_2, ℓ_2 sind **drei bekannt** und **einer gesucht**.

Lösung durch Dreisatz:
Wir machen drei Schritte:
• 5 kg entsprechen 18 m.
• 1 kg entspricht (18 m) : 5, also 3.6 m.
• 12 kg entsprechen (3.6 m) · 12, also 43.2 m.
In Tabellenform:

5 kg	18.0 m	: 5
1 kg	3.6 m	·12
12 kg	43.2 m	

Aufstellung einer Verhältnis-Gleichung:
Wir drücken die Beziehung $\ell_2 : m_2 \;=\; \ell_1 : m_1$, mit $\ell_2 = x$, durch Brüche aus,

$$\frac{x}{m_2} \;=\; \frac{\ell_1}{m_1}. \tag{219}$$

Dies ist eine **lineare Gleichung** für die Unbekannte x.
Multiplikation beider Seiten mit m_2 (eine ÄU !) ergibt die Lösung

$$x \;=\; m_2 \cdot \frac{\ell_1}{m_1} \;=\; \frac{m_2}{m_1} \cdot \ell_1 \;=\; \frac{12\,\text{kg}}{5\,\text{kg}} \cdot 18\,\text{m} \;=\; \frac{12}{5} \cdot 18\,\text{m} \;=\; 43.2\,\text{m}. \tag{220}$$

Bem.: Mit der sog. **Proportionalitätskonstante (PK)**

$$C = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \tag{221}$$

läßt sich die Beziehung zwischen den Größen a und b aus Def. 1 schreiben als

$$b = C\,a. \tag{222}$$

Im letzten Draht-Beispiel gilt etwa

$$m = \rho\,\ell, \tag{223}$$

mit der PK $\rho = \frac{m_1}{\ell_1} = \frac{m_2}{\ell_2}$, also

$$\rho = \frac{5\,\mathrm{kg}}{18\,\mathrm{m}} = \frac{5}{18}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \approx 0.2778\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}. \tag{224}$$

Damit können wir sofort die Masse eines Drahtstücks beliebiger Länge ℓ berechnen,

$$\ell = 16.73\,\mathrm{m}: \qquad \begin{aligned} m &= \rho\,\ell \\ &= 0.2778\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot 16.73\,\mathrm{m} \\ &= (0.2778 \cdot 16.73)\,\mathrm{kg} = 4.648\,\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{225}$$

5.1.2 Indirekte Proportionalität

Bsp. 2: Zur Produktion einer gewissen Gütermenge G brauchen $n_1 = 5$ Maschinen die Zeit $t_1 = 40$ min. Dann brauchen $n_2 = 8$ Maschinen für dieselbe Arbeit nur $t_2 = 25$ min, denn es gilt die **Produkt-Beziehung**

$$n_1 \cdot t_1 = n_2 \cdot t_2. \tag{226}$$

In Worten: *Je größer n desto kleiner t.*

Def. 2: Zwei (voneinander abhängige) Größen a und b heißen **indirekt proportional** zueinander, wenn ihre Werte in verschiedenen Fällen stets folgende Beziehung erfüllen,

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2. \tag{227}$$

Typische Fragestellung:
Wieder seien drei der vier Werte n_1, n_2, t_1, t_2 bekannt und der vierte, etwa t_1, gesucht. Jetzt ergibt sich die **Produktgleichung**

$$n_1 \cdot x = n_2 \cdot t_2. \tag{228}$$

Division durch n_1 ergibt die Lösung, etwa

$$x = \frac{n_2}{n_1} \cdot t_2 = \frac{7}{5} \cdot 18\,\mathrm{min} = 25.2\,\mathrm{min}, \tag{229}$$

wobei wir als bekannte Werte $n_1 = 5$, $n_2 = 7$ und $t_2 = 18$ min gewählt haben.

Bem.: Mit der Konstante

$$C = a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 \tag{230}$$

läßt sich die Beziehung zwischen den Größen a und b aus Def. 2 schreiben als

$$b = \frac{C}{a}. \tag{231}$$

5.1.3 Erweiterte Proportionalität

Häufig besteht ein Zusammenhang der Art (222) oder (231)
zwischen drei (oder noch mehreren) abhängigen Größen.

Bsp.: Eine gegebene Stoffmenge eines idealen Gases befinde sich in einem (dicht abschließenden) Zylindergefäß mit beweglichem Verschlußkolben. Dann besteht zwischen Volumen V, Druck P und (absoluter) Temperatur T des Gases die Beziehung

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}. \tag{232}$$

Es gibt also eine Konstante C mit der Eigenschaft

$$\frac{PV}{T} = C. \tag{233}$$

Durch geeignete Divisionen und Multiplikationen
lassen sich solche Beziehungen nach jeder Größe **auflösen**:

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot P_1. \tag{234}$$

5.2 Prozente und Zinsen

5.2.1 Prozentrechnung

Def.: Es seien p eine Zahl mit $0 \leq p \leq 100$ und B ein Betrag (etwa in kg, Liter, etc.). Unter $p\%$ des Betrages B versteht man den (Teil-)Betrag

$$B_1 \;=\; \frac{p}{100} \cdot B. \tag{235}$$

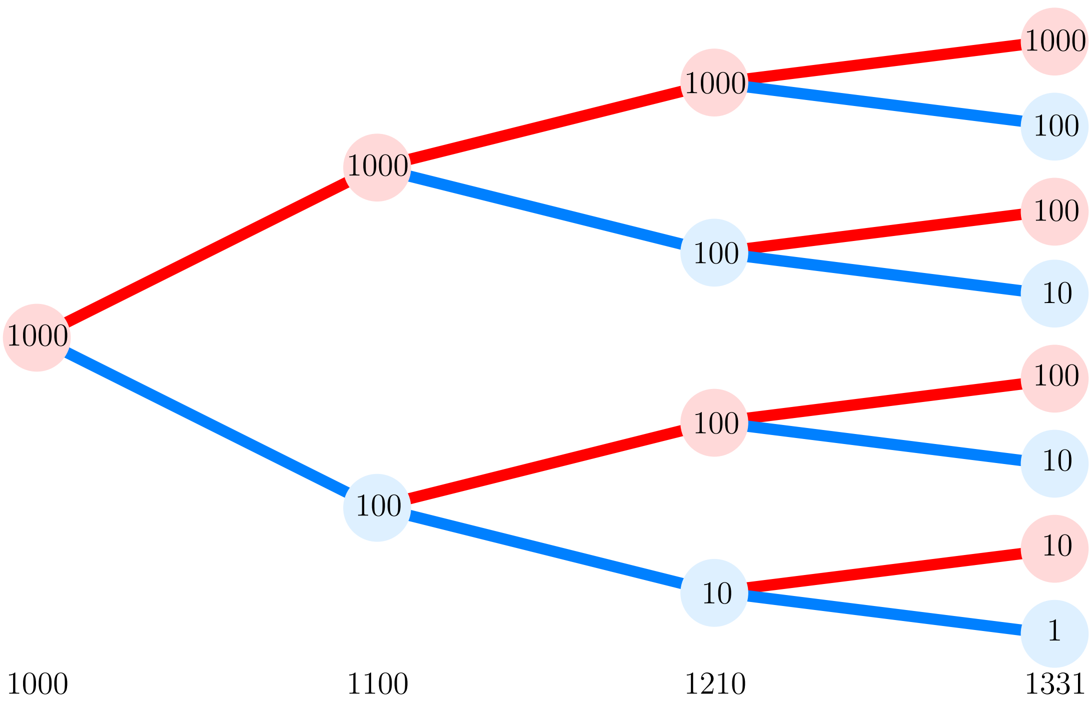
Die Zahl p wird manchmal als **Prozentfuß**, die Zahl $\frac{p}{100}$ als **Prozentsatz** bezeichnet. (Abweichend wird oft der Ausdruck $p\%$ oder die Zahl p als **Prozentsatz** bezeichnet.)

Bsp.:

$$\begin{aligned} 20\% \text{ von } 500 \text{ kg:} &\qquad \frac{20}{100} \cdot 500\,\text{kg} \;=\; 0.20 \cdot 500\,\text{kg} \;=\; 100\,\text{kg}, \\ 5.2\% \text{ von } 0.5\ \ell\text{:} &\qquad \frac{5.2}{100} \cdot 0.5\,\ell \;=\; 0.052 \cdot 0.5\,\ell \;=\; 0.026\,\ell, \\ 0.003\% \text{ von } 0.5 \text{ m:} &\qquad \frac{0.003}{100} \cdot 0.5\,\text{m} \;=\; 0.00003 \cdot 0.5\,\text{m} \;=\; 15\,\mu\text{m}. \end{aligned} \tag{236}$$

5.2.2 Zinsrechnung

Ein (Anfangs-) Kapital von 1000 Euro wird zum jährlichen **Zinssatz** von 10% angelegt. Die Vermehrung des Kapitals in den ersten drei Jahren illustriert ein **Baumdiagramm**:



Mit wachsender Zahl von Jahren wird die Situation offenbar sehr schnell unübersichtlich !

Viel einfacher geht es so:
Bezeichnet K_n den Wert des Kapitals nach n Jahren ($n = 0, 1, 2, 3, ...$), so gilt offenbar

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= K_n + \frac{p}{100} \cdot K_n \\ &= K_n + x \cdot K_n \\ &= (1+x) \cdot K_n, \qquad x = \frac{p}{100}. \end{aligned} \tag{237}$$

Beginnend mit dem Anfangskapital K_0 erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} K_1 &= (1+x) \cdot K_0, \\ K_2 &= (1+x) \cdot K_1 = (1+x)^2 \cdot K_0, \\ K_3 &= (1+x) \cdot K_2 = (1+x)^3 \cdot K_0, \end{aligned} \tag{238}$$

und so weiter. Nach n Jahren gilt also

$$K_n = (1+x)^n \cdot K_0. \tag{239}$$

Bsp. 1: Im Beispiel des Baumdiagramms gilt $1 + x = 1.1$ und $K_0 = 1000$, also

$$\begin{aligned} K_1 &= 1.1 \cdot 1000 = 1100, \\ K_2 &= 1.21 \cdot 1000 = 1210, \\ K_3 &= 1.331 \cdot 1000 = 1331, \qquad \text{etc.} \end{aligned} \tag{240}$$

Bsp. 2: Aus dem Anfangskapital $K_0 = 5000$ Euro wird im Fall

$$x = \frac{p}{100} = 0.05 \tag{241}$$

(also bei 5% jährlicher Verzinsung) in $n = 25$ Jahren das Kapital

$$\begin{aligned} K_{25} &= (1+x)^{25} \cdot 5000\,\text{Euro} \\ &= 1.05^{25} \cdot 5000\,\text{Euro} \\ &= 3.38635494... \cdot 5000\,\text{Euro} = 16\,931.77\,\text{Euro} \end{aligned} \tag{242}$$

Bsp. 3: Wie groß muß der Zinssatz p sein, damit aus $K_0 = 10000$ Euro in $n = 10$ Jahren das Kapital $K_{10} = 15000$ Euro wird?

$$\begin{aligned} 10000 \cdot (1+x)^{10} &= 15000 \quad \Big| \; : 10000 \\ (1+x)^{10} &= 1.5 \quad \Big| \; \sqrt[10]{\ldots} \\ 1 + x &= \sqrt[10]{1.5} \\ &= 1.04138 = 1 + \frac{4.138}{100}. \end{aligned} \tag{243}$$

Der erforderliche Zinssatz ist also 4.138%.

6 Elementare Geometrie

Grundbegriffe: Punkt, Strecke, Strahl, Gerade, Kreis(linie).

6.1 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben ist eine Menge M von Punkten $A, B, C, ...$ ("Kreuzchen") in der Zeichenebene. Erlaubt sind folgende Erweiterungen mit Hilfe von Zirkel und Lineal:

- Zeichnen der Gerade durch je zwei der Punkte.
- Zeichnen eines Kreises mit gegebenem Radius R um je einen der Punkte.
  (R muß der Abstand zweier gegebener Punkte sein, den man "in den Zirkel nimmt"; die Skalenstriche auf dem Lineal dürfen nicht benutzt werden.)

Jeder Schnittpunkt zwischen solchen Geraden und Kreisen gilt als **neuer Punkt**. Alle Punkte, die sich auf diese Weise aus M "konstruieren" lassen, bilden die Menge $\mathrm{Kon}(M)$.

6.1.1 Mittelsenkrechte einer Strecke

Geg.: 2 Punkte A und B.
Ges.: Jene Gerade m, welche die Strecke AB senkrecht schneidet und halbiert.
Lösung:
(1) Zwei gleichgroße Kreise um A und um B schneiden sich in zwei Punkten S_1 und S_2.
(2) Die gesuchte Gerade m ist S_1S_2.

6.1.2 Winkelhalbierung

Geg.: 3 Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen.
Ges.: Jene Gerade h, welche durch C geht und dabei den Winkel ACB halbiert.
Lösung:
(1) Der Kreis um C durch A schneidet die Gerade CB im Punkt S.
(2) Die gesuchte Winkelhalbierende h ist die Mittelsenkrechte der Strecke AS.

6.1.3 Parallele einer Gerade

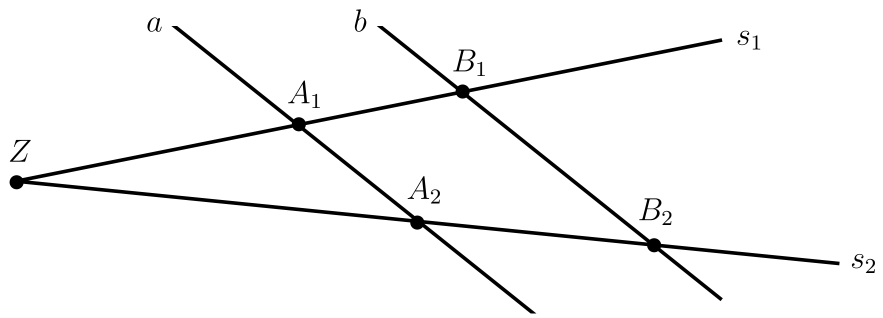
Geg.: 3 Punkte A, B und P, die nicht auf einer Geraden liegen.
Ges.: Jene Gerade p durch P, welche zur Gerade AB parallel ist.
Lösung:
(1) Kreis um P, der die Gerade AB in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet.
(2) Die Mittelsenkrechte der Strecke S_1S_2 schneidet den Kreis von (1) in T_1 und T_2.
(3) Die Mittelsenkrechte der Strecke T_1T_2 ist die gesuchte Parallele p zu AB durch P.

6.2 Ähnlichkeit

6.2.1 Strahlensatz

Satz 1: Zwei von einem Punkt Z ausgehende Strahlen s_1 und s_2 schneiden sich mit einem Paar zweier paralleler Geraden a und b in den Punkten A_1 und A_2 bzw. B_1 und B_2. Dann stehen die auftretenden Strecken in folgenden Längenverhältnissen

$$\frac{ZA_1}{ZB_1} = \frac{ZA_2}{ZB_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}. \tag{244}$$

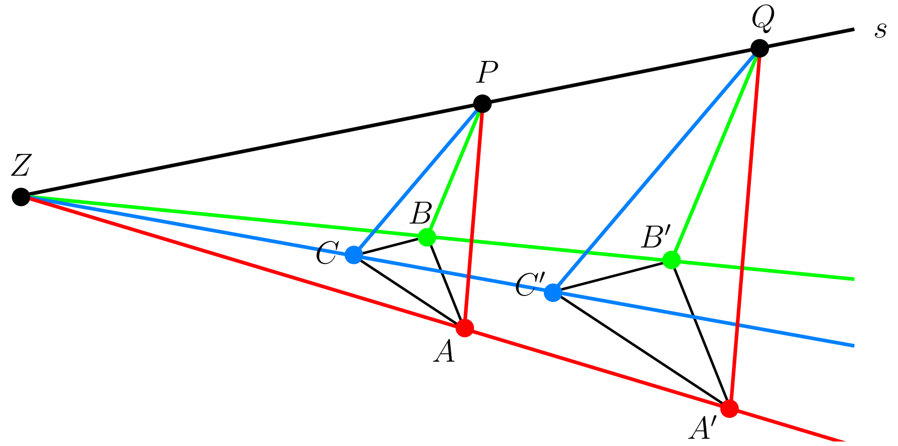


6.2.2 Zentrische Streckung

Auf einem von Z ausgehenden Strahl s sind zwei Referenzpunkte P und Q gegeben. Eine Figur ABC... wird am Zentrum Z gestreckt um den Faktor

$$m = \frac{\text{Länge der Strecke } ZQ}{\text{Länge der Strecke } ZP}, \tag{245}$$

mit dem Ergebnis $A'B'C'$... (gestreckte Figur),
indem man auf jeden Punkt $A, B, C, ...$ der Figur den Strahlensatz anwendet.
Für den Punkt A (mit Bildpunkt A') ist dies in der Abbildung in rot dargestellt.



Def.: Zwei geometrische Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreise, etc.) heißen **ähnlich**, wenn sie durch zentrische Streckung zur Deckung gebracht werden können.

6.3 Dreiecke

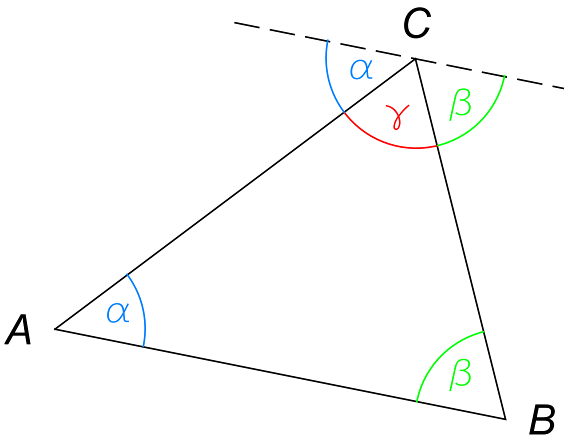
Im Dreieck ABC bezeichnet α den Innenwinkel bei A, β den bei B und γ den bei C. Dagegen sind a, b bzw. c die den Ecken A, B bzw. C *gegenüber* liegenden Seiten.

6.3.1 Allgemeine Dreiecke

Satz 2: Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ABC beträgt 180°,

$$\alpha + \beta + \gamma \;=\; 180°. \tag{246}$$

Zum **Beweis** zeichne man durch den Eckpunkt C die Parallele zur Seite $c = AB$.



Zwei Dreiecke sind **ähnlich**, wenn zwei Winkel des einen Dreiecks gleich zwei Winkeln des anderen sind. (Dann ist natürlich auch der dritte Winkel bei beiden Dreiecken gleich.)

Def.: Das vom Punkt A auf die gegenüberliegende Seite a gefällte Lot heißt **Höhe** h_a eines Dreicks. Entsprechend sind seine beiden anderen Höhen h_b und h_c definiert.

Sei g eine der drei Seiten (a, b oder c) und $h = h_g$ die entsprechende Höhe eines Dreiecks. Dann ist sein **Flächeninhalt** offenbar gegeben durch (Beweis ?)

$$A \;=\; \frac{gh}{2}. \tag{247}$$

Def.: Die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks laufen durch einen der Eckpunkte und halbieren den zugehörigen Innenwinkel. Dagegen laufen die **Seitenhalbierenden** durch (eine Ecke und) den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die **Mittelsenkrechten** des Dreiecks schneiden seine Seiten in deren Mittelpunkten senkrecht.

Satz 3: Für jedes Dreieck gilt:
Die drei Winkelhalbierenden schneiden sich im **Inkreismittelpunkt**.
Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich im **Umkreismittelpunkt**.
Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich im **Schwerpunkt**.
Auch die (über ihre Endpunkte hinaus verlängerten) Höhen schneiden sich in einem Punkt.

6.3.2 Rechtwinklige Dreiecke

Dies sind Dreiecke, in denen ein Innenwinkel, den wir γ nennen, $90°$ beträgt.
Dann ergänzen sich die beiden anderen Innenwinkel zu $90°$: $\alpha + \beta = 90°$.
Die längste Seite ist dann immer c und heißt **Hypotenuse**.
Die beiden anderen Seiten a und b heißen **Katheten** des rechtwinkligen Dreiecks.

Im rechtwinkligen Dreieck gilt offenbar $h_a = b$ und $h_b = a$. Es hat also den Flächeninhalt

$$A = \frac{ab}{2}. \tag{248}$$

Satz 4 (Pythagoras): Die Summe der Quadrate der Kathetenlängen a und b eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrat der Hypotenusenlänge,

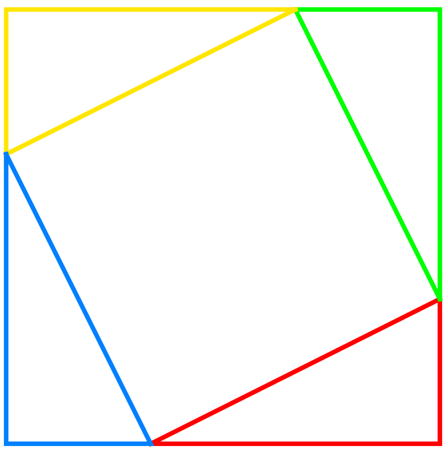
$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{249}$$

Zum **Beweis** dieses Satzes zeichne man ein Quadrat mit Seitenlänge c. Jede seiner vier Seiten bildet die Hypotenuse eines außerhalb dieses Quadrats liegenden rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten a und b, und zwar so, daß insgesamt ein größeres Quadrat mit Seitenlänge $a + b$ entsteht. Dessen Inhalt,

$$A = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{250}$$

ist andererseits gleich c^2 plus dem vierfachen Inhalt eines der vier rechtwinkligen Dreiecke,

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}, \qquad \text{q. e. d.} \tag{251}$$



6.3.3 Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke

Def.: Ein Dreieck heißt **gleichschenklig**, wenn zwei seiner drei Seiten gleich lang sind. Es heißt **gleichseitig**, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

Aus Satz 4 (Pythagoras) folgt: Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a hat die Höhe

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \approx 0.866\, a. \tag{252}$$

6.4 Vierecke

Jedes Viereck wird durch jede seiner beiden Diagonalen in je zwei Dreiecke zerlegt. Daher lassen sich viele Eigenschaften von Vierecken auf Dreiecke zurückführen.
Zwei Beispiele:

Satz 4: Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Vierecks $ABCD$ beträgt 360°,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ = \ 360°. \tag{253}$$

Satz 5: Schneiden sich die Diagonalen eines Vierecks rechtwinklig, so gilt

$$a^2 \ + \ c^2 \ = \ b^2 \ + \ d^2, \tag{254}$$

wenn die vier Seiten in umlaufender Folge mit a, b, c, d bezeichnend werden.

Def.: Ein Viereck heißt
• **Trapez**, wenn zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind,
• **Parallelogramm**, wenn jede Seite zur gegenüberliegenden Seite parallel ist,
• **Rechteck**, wenn alle vier Innenwinkel 90° betragen,
• **Raute (oder Rhombus)**, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.
• **Quadrat**, wenn es zugleich ein Rechteck und eine Raute ist.

Für die Mengen Q aller Quadrate, R aller Rechtecke, etc. gilt die Beziehung

$$Q \ \subset \ R \ \subset \ P \ \subset \ T. \tag{255}$$

Mit der Menge X aller Rauten gelten ferner

$$Q \ = \ R \cap X, \qquad\qquad X \ \subset \ P \ \subset \ T. \tag{256}$$

Satz 6: Ein Rechteck mit Seitenlängen a und b hat die **Diagonalenlänge**

$$d \ = \ \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{257}$$

Im Spezialfall eines Quadrats ($b = a$) gilt

$$d \ = \ a\sqrt{2}. \tag{258}$$

6.5 Kreise

Da Kreise verschiedener Größe durch zentrische Streckung auseiander hervorgehen, also zueinander **ähnlich** sind, muß der Umfang u eines beliebigen Kreises (mit Radius r) jeweils um einen universellen Faktor π größer sein als sein Durchmesser $d = 2r$,

$$u \;=\; \pi\, d \;=\; 2\pi\, r. \tag{259}$$

Um den Wert der **Kreiszahl** π abzuschätzen, vergleichen wir den Kreisumfang u mit den Umfängen u_4 und U_4 des ein- bzw. umbeschriebenen Quadrates (4: Anzahl der Ecken),

$$u_4 \;<\; u \;<\; U_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\sqrt{2}\, d \;<\; \pi\, d \;<\; 4\, d \qquad \Leftrightarrow \qquad 2.828 \;<\; \pi \;<\; 4. \tag{260}$$

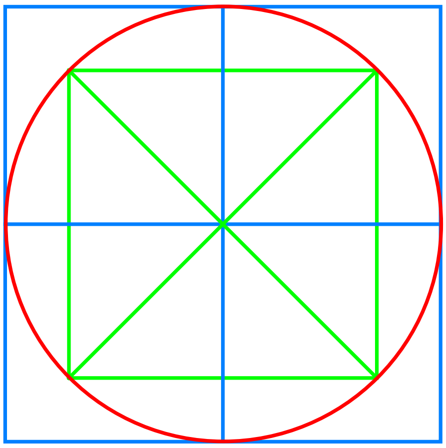


Figure 4: Ein Kreis (rot) mit ein- und umbeschriebenen Quadraten (grün bzw. blau).

Für genauere Werte kann man durch fortschreitende Winkelhalbierung übergehen von den Quadraten zu Achtecken, 16-Ecken, 32-Ecken, etc. Der genaue Wert ist

$$\pi \;=\; 3.14159265... \tag{261}$$

Satz 7: Ein Kreis mit Radius r hat den Flächeninhalt

$$A \;=\; \pi\, r^2. \tag{262}$$

Bew.: Zerschneidet man die Kreisfläche in viele gleichgroße "Tortenstücke", so lassen diese sich in guter Näherung zu einem Rechteck zusammenfügen, dessen Seiten die Längen r bzw. $\frac{u}{2} = \pi r$ haben, dessen Flächeninhalt also tatsächlich den Wert $A = \pi\, r^2$ hat.

Übungsaufgabe:

1. Der Mittelpunkt eines Kreises befinde sich auf der Randlinie eines zweiten Kreises mit gleichem Radius r. Welchen Flächeninhalt besitzt die Schnittfigur zwischen beiden Kreisen ?
   Antwort: $A = (\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3})r^2 \approx 1.228\, r^2$.

6.6 Körper

6.6.1 Quader und Würfel

Ein **Quader** ist ein dreidimensionaler Körper, der von sechs ebenen Rechtecken begrenzt wird. Die 12 Kanten bilden drei Gruppen aus je vier Strecken gleicher Länge a, b bzw. c. Das Volumen des Quaders beträgt

$$V = abc. \tag{263}$$

Im Fall $b = c = a$ wird der Quader als **Würfel** bezeichnet, mit dem Volumen

$$V = a^3. \tag{264}$$

6.6.2 Zylinder

Ein **Zylinder** wird eingeschlossen von
• zwei gleichgroßen parallelen Kreischeiben G und D,
• den Linien, welche die einander entsprechenden Randpunkte von G und D verbinden.
Falls diese Linien senkrecht zu G und D verlaufen, heißt der Zylinder **gerade**.

Der Abstand der beiden Ebenen, in denen G und D liegen, heißt **Höhe** h des Zylinders. Das Volumen des Zylinders beträgt

$$V = Gh. \tag{265}$$

Ein gerader Zylinder mit Grundkreisradius r hat die Mantelfläche M und Oberfläche O,

$$M = 2\pi rh, \qquad O = 2\pi r(r+h). \tag{266}$$

6.6.3 Kegel

Ein **Kegel** wird eingeschlossen von
• einem ebenen Flächenstück G von beliebiger Form und
• den Linien, welche die Randpunkte von G mit einem Punkt S verbinden.

Der Abstand seiner Spitze S von der Ebene der Grundfläche G heißt **Höhe** h des Kegels. Das Volumen des Kegels beträgt

$$V = \frac{Gh}{3}. \tag{267}$$

Ist die Grundfläche G eine Kreisscheibe, so spricht man von einem **Kreiskegel**. Beim **geraden Kreiskegel** liegt die Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkt der Kreisscheibe.

6.6.4 Kugel

Eine Kugel vom Radius r hat die Oberfläche O und das Volumen V, gegeben durch

$$O = 4\pi r^2, \qquad V = \frac{4\pi}{3} r^3. \tag{268}$$

7 Lineare Funktionen und Geraden

7.1 Lineare Funktionen

7.1.1 Beispiele

Bsp. 1: Ein Telefonvertrag enthalte einen monatlichen Grundpreis von 20.– EUR, sowie einen Preis von 0.12 EUR pro Einheit. Werden in einem bestimmten Monat x Einheiten (unabhängige Variable, uV) telefoniert, so errechnet sich der für diesen Monat zu zahlende Betrag y (abhängige Variable, aV) aus der Vorschrift

$$y = 0.12\,x + 20. \tag{269}$$

Bsp. 2: Ein Tank enthalte anfangs 50 Liter (ℓ) Benzin. Bei einem Verbrauch von 6.0 $\frac{\ell}{100\,\mathrm{km}}$ befinden sich nach x gefahrenen Kilometern (uV) noch y Liter (aV) im Tank,

$$\begin{aligned} y &= 50 - 0.06\,x \\ &= -0.06\,x + 50. \end{aligned} \tag{270}$$

Bsp. 3: Auf ein Konto, das zu Beginn mit 6000 EUR belastet ist, werden monatlich 250 EUR eingezahlt. Dann hat das Konto nach x Monaten den Stand

$$\begin{aligned} y &= -6000 + 250\,x \\ &= 250\,x + (-6000). \end{aligned} \tag{271}$$

7.1.2 Definition

In allen genannten Beispielen hat die Zuordungsvorschrift die einheitliche Form

$$y = m \cdot x + t, \tag{272}$$

wobei m und t jeweils zwei vorgegebene (bekannte) Zahlen sind:

Bsp.:	1	2	3
m	0.12	-0.06	250
t	20	50	-6000

Def.: Seien m und t zwei vorgegebene Zahlen. Wird jeder beliebigen Zahl $x \in \mathbb{R}$ jeweils eine durch den Wert von x bestimmte Zahl y zugeordnet, und zwar nach der Vorschrift

$$y = mx + t, \tag{273}$$

so nennt man diese Zuordnung eine **lineare Funktion** f. Man schreibt

$$f : x \mapsto y = mx + t, \tag{274}$$

oder kürzer: $f(x) = mx + t$ (sprich: "f von x ist gleich $mx + t$").
x und y heißen unabhängige bzw. abhängige Variable (uV, aV), m und t heißen Parameter.

7.1.3 Graphische Darstellung

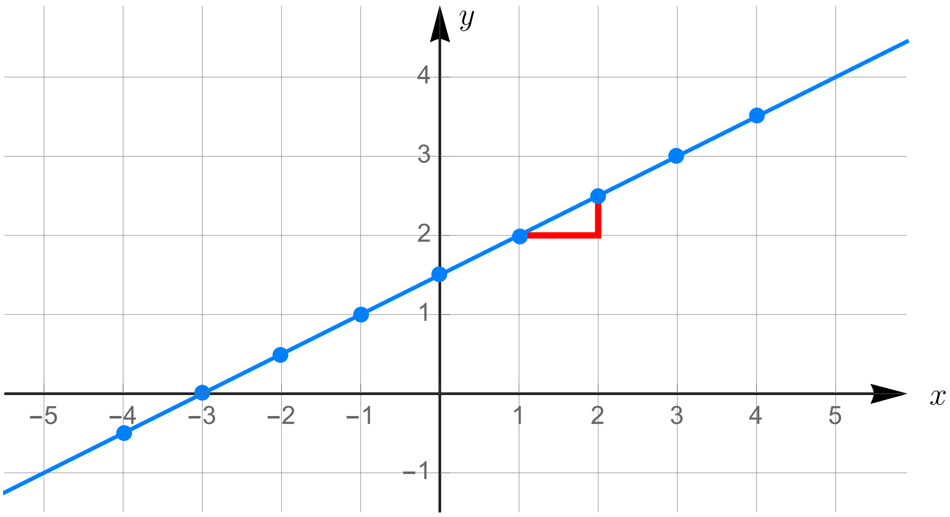
Als Beispiel betrachten wir die lineare Funktion f mit $m = 0.5$ und $t = 1.5$,

$$f(x) \;=\; 0.5\,x \,+\, 1.5, \tag{275}$$

und erstellen eine **Wertetabelle** $y = f(x)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5

Tragen wir diese Wertepaare $(x|y)$ als blaue Punkte in die xy-Ebene ein, so liegen diese Punkte auf einer **Gerade** (blau), welche als **Graph** G_f der Funktion f bezeichnet wird.



Die Lage dieser Gerade wird durch die Werte der Parameter m und t bestimmt:
- m ist die **Steigung** der Gerade (siehe folgende Definition).
- $y = t$ ist die Stelle, an der die Gerade die y-Achse schneidet.

Def.: Die Steigung einer Gerade in der xy-Ebene ist das Verhältnis

$$m \;=\; \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{276}$$

wobei $\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$ die Koordinatendifferenzen zweier Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ sind, die auf der Geraden liegen.

Bem. 1: $|\Delta x|$ und $|\Delta y|$ sind die Längen der Katheten (rot in der Abbildung) des rechtwinkligen **Steigungsdreiecks**, dessen Hypotenuse ein Abschnitt der Gerade ist.

Bem. 2: Im Fall $m < 0$ verläuft die Gerade von links oben nach rechts unten.

Anschaulich: Gehen wir von einem beliebigen Punkt auf der Gerade um eine Einheit nach rechts (in x-Richtung), so müssen wir anschließend genau m Einheiten in y-Richtung gehen (Vorzeichen von m beachten!), um wieder die Gerade zu erreichen.

7.2 Bezug zur Geradengleichung

In Abschnitt 4.2 haben wir den Ausdruck

$$g:\ a\,x + b\,y \;=\; r \tag{277}$$

als allgemeine Gleichung einer Gerade g in der xy-Ebene kennengelernt.
Im Fall $b \neq 0$ können wir beide Seiten durch b dividieren,

$$\frac{a}{b}\,x + y \;=\; \frac{r}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; -\frac{a}{b}\,x + \frac{r}{b} \;=\; m\,x + t. \tag{278}$$

Wir sehen:
- Im Fall $b \neq 0$ ist g der Graph G_f einer linearen Funktion f mit den Parametern

$$m \;=\; -\frac{a}{b}, \qquad t \;=\; \frac{r}{b}. \tag{279}$$

- Im Fall $b = 0$ verläuft die Gerade g parallel zur y-Achse.
  Eine solche Gerade kann **nicht Graph** einer Funktion sein,
  da eine Funktion jedem x-Wert **genau einen** y-Wert zurodnet.

7.3 Relative Lage von Geraden und Punkten

Die Graphen (Geraden) G_f und G_g zweier linearer Funktionen f bzw. g,

$$f(x) \;=\; m_1\,x + t_1, \tag{280}$$

$$g(x) \;=\; m_2\,x + t_2, \tag{281}$$

sind zueinander **parallel**, wenn ihre Steigungen gleich sind,

$$m_2 \;=\; m_1. \tag{282}$$

Dagegen verlaufen G_f und G_g **senkrecht** zueinander, wenn gilt

$$m_2 \;=\; -\frac{1}{m_1}. \tag{283}$$

Übungsaufgaben:

1. Zeichnen Sie die Graphen der beiden linearen Funktionen $f(x) = -0.5\,x + 2$ und $g(x) = x - 1$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S(x_S|y_S)$ dieser Geraden (i) zunächst graphisch, (ii) dann rechnerisch.

2. Um den **Abstand d des Punktes** $P(x_0|y_0)$ vom Graphen G_f der Funktion

$$f(x) \;=\; m\,x + t \tag{284}$$

   zu berechnen, betrachten wir jene zweite Funktion

$$p(x) \;=\; -\frac{1}{m}\,x + t', \tag{285}$$

   deren Graph G_p zu G_f senkrecht verläuft und den Punkt P enthält.
   Es muß also $p(x_0) = y_0$ gelten,

$$y_0 \;=\; -\frac{1}{m}\,x_0 + t'. \tag{286}$$

   Welche Bedingung folgt hieraus für den Wert von t' ?
   Wie groß ist der gesuchte Abstand d ?

7.4 Ausblick: Quadratische Funktionen

Schreiben wir $m = a$ und $t = b$, so lautet der allgemeine Term einer linearen Funktion

$$f(x) \;=\; a\,x \;+\; b. \tag{287}$$

Dagegen ist eine **quadratische Funktion** gegeben durch einen Term der Form

$$f(x) \;=\; a\,x^2 \;+\; b\,x \;+\; c, \tag{288}$$

mit **drei** Parametern a, b und c.

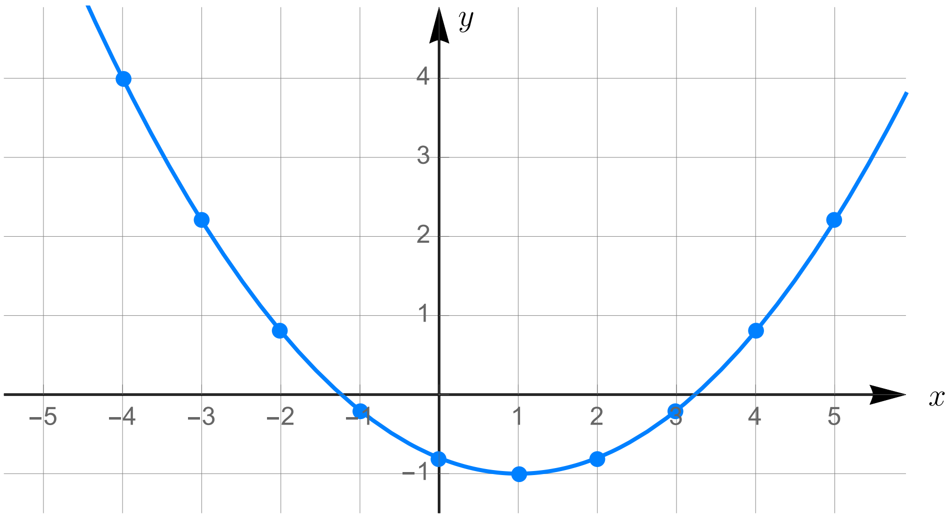
Als Beispiel betrachten wir den Fall mit $a = 0.2$, $b = -0.4$ und $c = -0.8$,

$$f(x) \;=\; 0.2\,x^2 \;-\; 0.4\,x \;-\; 0.8, \tag{289}$$

und erstellen wieder eine **Wertetabelle** $y = f(x)$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	4.0	2.2	0.8	-0.2	-0.8	-1.0	-0.8	-0.2	0.8	2.2

Tragen wir diese Wertepaare $(x|y)$ wieder als blaue Punkte in die xy-Ebene ein, so liegen diese Punkte jetzt auf einer **Parabel**, dem Graphen einer quadratischen Funktion.



Impressum

Autor:	Dr. Michael Seidl
Herausgegeben durch:	Teilprojekt #aufstieggestalten der OTH Amberg-Weiden aus dem Verbundprojekt „OTH mind“ mit der OTH Regensburg des Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“
Kontakt:	Hetzenrichter Weg 15, 92637 Weiden in der Oberpfalz othmind@oth-aw.de www.oth-aw.de/oth-mind
Copyright:	Dieses Kursmaterial ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0). Bei einer Weitergabe soll der Name des Urhebers wie folgt genannt werden: „Dr. Michael Seidl, im Rahmen von OTH mind #aufstieggestalten, OTH Amberg-Weiden“.
Hinweis:	Diese Publikation wurde im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) geförderten Bund-Länder-Wettbewerbs „Aufstieg durch Bildung: offene Hochschulen“ erstellt. Die in dieser Publikation dargelegten Inhalte liegen in der alleinigen Verantwortung des Autors.