

Aufgabensammlung zum Mathematikvorbereitungskurs¹

Exponentialfunktion und logarithmische Funktion

1. Zerlegen Sie die Logarithmen in Summen und Differenzen!

a) $\ln \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt[3]{27b}}$

b) $\ln \sqrt{a \cdot \frac{x^2}{\sqrt{z}}}$

c) $\ln \sqrt{a^3 \cdot \frac{b^2}{\sqrt[4]{8z^3}}}$

2. Fassen Sie die folgenden Terme zu einer einzigen Logarithmusfunktion zusammen!

a) $a \cdot \ln(a \cdot b) - \frac{1}{2} \ln x$

b) $\ln a + x \cdot \ln x - \frac{1}{a} \cdot \ln b$

c) $0,5 \cdot (\ln(a+b) - \ln(a \cdot b))$

Exponentialfunktion e^x und natürlicher Logarithmus $\ln x$

3. Lösen Sie nach x auf!

a) $y = \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

b) $y = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$

¹ Nach Prof. Dr. K. Hoffmann

c) $y = \frac{e^x}{1+e^x}$

d) $y = \ln(x+1) + \ln(x-1)$

4. Fassen Sie zu einem Term zusammen!

a) $\log 4 - \log 2 + \log 3$

b) $\log(\sqrt{a^3}) - \log \sqrt{a} + \log b$

c) $-\frac{1}{2}(\log u - 3 \cdot \log v)$

d) $\frac{1}{3}\log(a^m) - (m+1) \cdot \log a$

Prozentrechnen

5. Jemand verleiht 15000 € und erhält nach einem Jahr 16875 € zurück. Wie viel Prozent Zinsen hat er erhalten?
6. Eine Firma gewährt 10 % Nachlass vom Listenpreis, auf den ermässigten Preis 8% Sonderrabatt und schließlich noch 3% Skonto bei Barzahlung. Um wie viel Prozent reduziert sich der Preis insgesamt?
7. Ein Arbeiter erhält einen Stundenlohn von 9 €. Durch zwei gleich hohe prozentuale Steigerungen soll der Stundenlohn nach zwei Jahren 10 € betragen. Wie hoch ist die jährliche prozentuale Steigerung?

Differentialrechnung

8. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = x^2 + 3 \cdot x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

e) $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$

f) $u(t) = (3t^2 + 4)(2t^3 - 1)$

g) $\varphi(t) = \cos(\sin(t))$

h) $g(x) = \frac{2x^3}{a^2 - x^2}$

i) $u(t) = \frac{(3t+5)^{10}}{5t+1} - \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{t}\right)$

j) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$

k) $f(x) = \sin(x \cdot \ln x)$

l) $f(x) = e^{2x+3}(2x+3)$

m) $f(x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{2x}}$

n) $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$

o) $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}}$

p) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$

9. Extremwert: Bei einem senkrechten Wurf nach oben lautet die Weg-Zeit-Gleichung des Körperschwerpunktes des geworfenen Körpers

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ und der Erdbeschleunigung $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

Wann erreicht dieser Körper seine größte Höhe?

Potenzen und Wurzeln

10. Multiplizieren Sie aus!

a) $\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^2$

b) $\left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x}\right)^2 \cdot x^{-1}$

c) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{-7}}}$

Integralrechnung

11. Berechnen Sie:

$$\int (2x^5 - x^2 + 5) dx$$

12. Skizzieren Sie die angegebene Funktion und berechnen Sie die eingeschlossenen Flächen!

$$f(x) = x^2 - 3; \quad g(x) = x - 1$$

Binomischer Lehrsatz/Wahrscheinlichkeitsrechnung

13. An der HAW Amberg-Weiden wird eine Studienreise unter dem Motto „Energetische Nutzung von Biomasse“ nach Graz und Güssing in Österreich angeboten, an der insgesamt 22 Personen teilnehmen können. Es melden sich 30 Interessierte für die Reise.

- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus eine Reisegruppe mit 22 Personen zusammen zustellen?
- b) Bei der Zusammenstellung der 22er Gruppe werden (jeweils ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge) zwei der vier interessierten Professoren, vier der acht nichtwissenschaftlichen interessierten Mitarbeiter und 16 der 18 interessierten Studierenden ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung der Reisegruppe gibt es?

14. In einer Pizzeria werden sechs verschiedene Pizzazutaten verwendet – eine davon Salami. In der Speisekarte sind alle Pizzaarten mit mindestens 3 Zutaten aufgeführt.

- a) Wie viele Pizzaarten enthält die Speisekarte?
- b) Wie viele Pizzaarten mit genau drei Zutaten enthalten keine Salami?

Vektoren

15. Berechnen Sie den Flächeninhalt des im \mathbb{R}^3 liegenden Dreiecks mit den Ecken

$$A_1 = (2;1;-1); A_2 = (1;2;2); A_3 = (0;1;2)$$

Funktionsgraph

16. Für eine Funktion $y = f(x)$, $x \in \mathfrak{R}$ sei der Graph bekannt. Überlegen Sie, wie der Graph der folgenden Funktionen aussehen muss!

a) $y = f(x) + c$

b) $y = a \cdot f(x)$

c) $y = f(x + c)$

d) $y = f(a \cdot x)$

e) $y = |f(x)|$

f) Überprüfen Sie Ihre Aussagen am Beispiel $y = \sin(x)$, $c = \frac{\pi}{2}$, $a = 2$!

Weitere Aufgaben

17. In ein leeres kegelförmiges Gefäß mit 12 cm Durchmesser und 18 cm Höhe wird Wasser mit einem Volumenstrom von $12 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$ gefüllt.

a) Wie schnell steigt der Flüssigkeitspegel zu dem Zeitpunkt, an dem das Gefäß zu $\frac{1}{8}$ gefüllt ist?

b) Wie schnell steigt der Flüssigkeitspegel zum Zeitpunkt $t = 8$ s?

Tangentengleichung

18. Stellen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Geradengleichung für die Tangente an den Graphen an der Stelle a auf:

a) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$

b) $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$; $a = \frac{\pi}{4}$

c) $f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x}}$; $a = 1$

Polynomfunktionen

19. Für verschiedene Zwecke möchte man Funktionen $f(x)$, die in einer Umgebung einer gegebenen Stelle a definiert sind, durch Polynomfunktionen annähern. Unter bestimmten Voraussetzungen für die Funktion $f(x)$ ist dies tatsächlich möglich und es gibt den folgenden Bauplan für diese Polynomfunktionen:

$$\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k .$$

Hierbei sind die a_k gewisse Konstanten, die nach einer geeigneten Vorschrift aus der Funktion $f(x)$ und aus der Stelle a errechnet werden können. Uns interessiert im

Folgenden jedoch nur der Bauplan $\sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$.

Ordnen Sie die folgenden Beispiele in diesen allgemeinen Bauplan ein!

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

b) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

c) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

d) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{16}(x+1)^3$

f) $\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{27}{8}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$