3.4.4 Die M/M/s-Multiserver-Warteschlange

Ein M/M/s-Multiserver-Sytem besteht aus einer Anzahl von s unabhängigen Servern (z.B. Drucker) und einer unendlich großen Warteschlange. Daher wird ein solches System manchmal auch mit M/M/s/∞ bezeichnet. Die ankommenden Nachrichten bilden einen Poissonstrom mit der Ankunftsrate λ. Alle Server haben die gleiche exponentielle Bedienzeitverteilung, d.h. jeder Server bearbeitet die anstehenden Nachrichten mit der Service-Rate μ. Im folgenden Bild 76a ist das Modell des M/M/s-Multiserver-Systems illustriert.

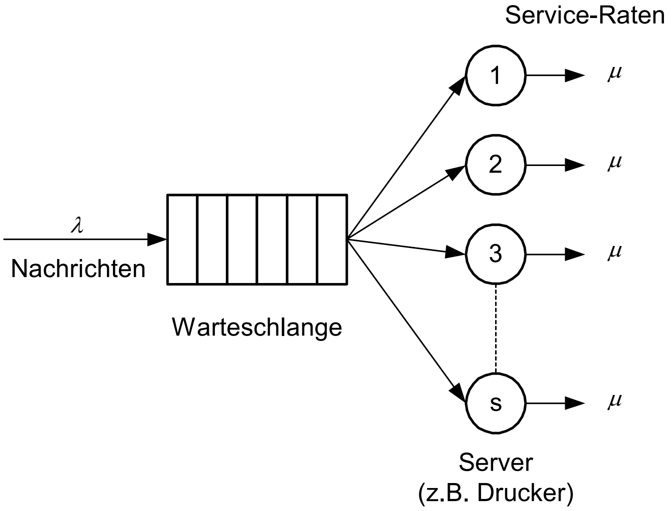


Bild 76: Modell des M/M/s-Multiserver-Systems

Bezeichnen wir mit i die Anzahl der Nachrichten im System, dann ist bei i=1 nur eine Server tätig. Sie bearbeitet die Nachricht mit der Service-Rate 1μ. Ist i=2, dann sind 2 Server gleichzeitig im Einsatz. Sie wirken deshalb wie ein **einzelner** Server mit der Service-Rate 2μ. Ist i=3, dann liefern analog 3 parallel arbeitende Server einen Poisson-Strom mit Service-Rate 3μ. Sind schließlich alle s Server aktiv, dann lautet die kombinierte Service-Rate $s\mu$. Siehe Bild 76a.

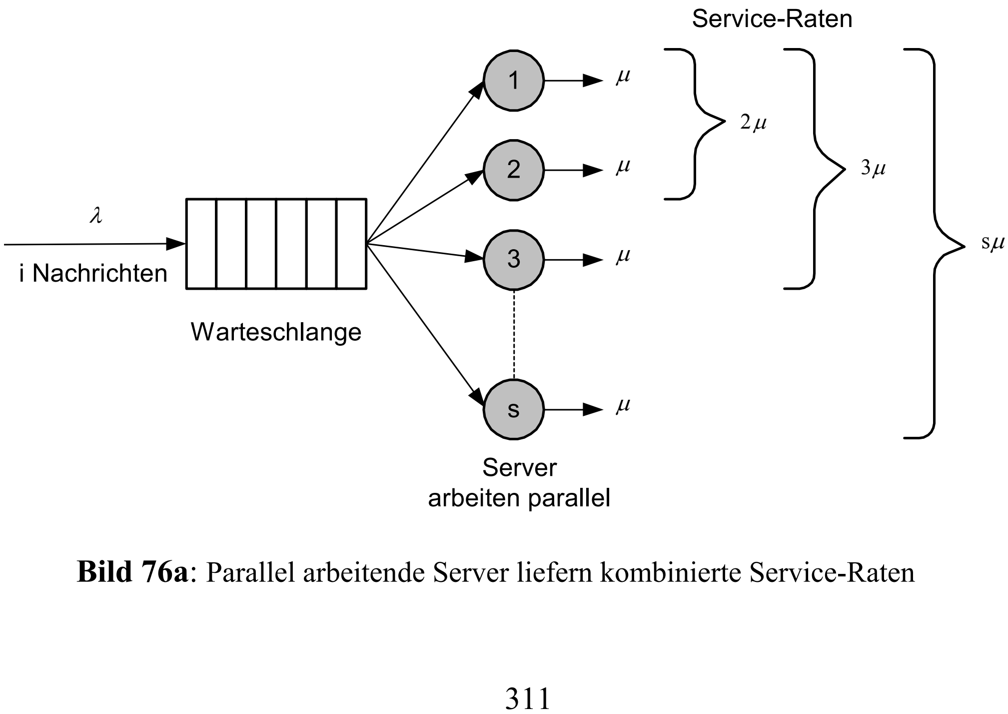


Bild 76a: Parallel arbeitende Server liefern kombinierte Service-Raten

Unter der Voraussetzung, dass die Ankunftsrate (birth-Rate) konstant ist, gilt unabhängig von der Anzahl der Nachrichten im System $\lambda_i = \lambda$ für alle i. Im Gegensatz dazu ist die Service-Rate (death-Rate) abhängig von der Anzahl der Nachrichten im System.
Ist i=s, dann sind alle Server tätig. Dies gilt auch, wenn sich mehr als s Nachrichten im System aufhalten, wenn also $i \geq s$ ist. Alle Server sind dann im Einsatz, während einige Nachrichten in der Warteschlange auf ihre Bearbeitung warten. Da für die wartenden Nachrichten die s parallel arbeitenden Server wie ein einzelnen Server mit der Service-Rate $s\mu$ wirkt, lautet demzufolge auch für sie die kombinierte Service-Rate $s\mu$.
Also gilt:

$$\boxed{\mu_i = s\mu \text{ für } i \geq s}$$

Die Anzahl der wartenden Nachrichten berechnet sich zu i-s. **Beispiel**: Es sei s=4 und i=7. Somit warten i-s = 7-4 = 3 Kandidaten auf ihre Bearbeitung. Siehe Bild 76b.

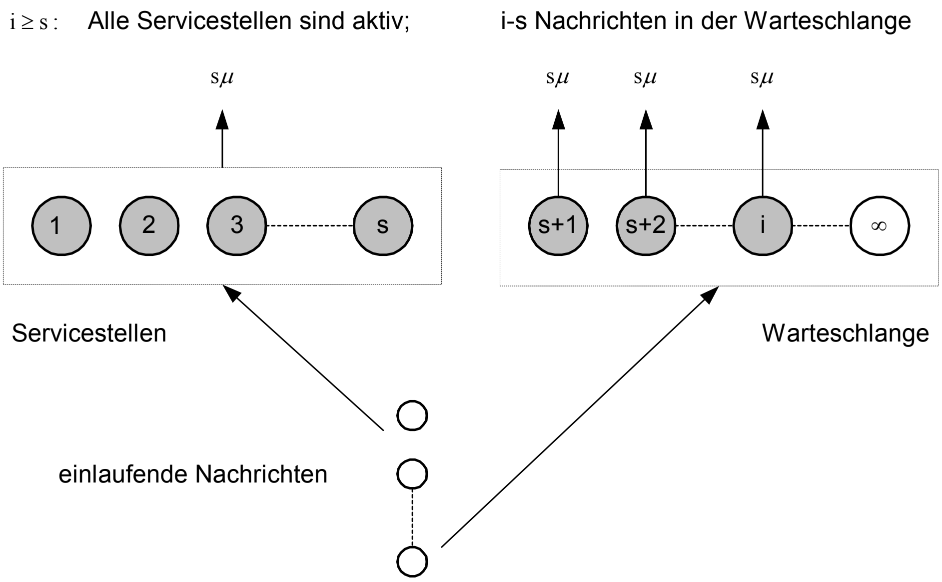


Bild 76b: Service-Raten und Anzahl der wartenden Nachrichten für $i \geq s$

Befinden sich weniger als s Nachrichten im System, dann müssen auch nur i < s Server tätig sein. Dies bedeutet, die betreffenden Nachrichten werden mit der kombinierten Service-Rate $i\mu$ bearbeitet. So gilt:

$$\boxed{\mu_i = i\mu \text{ für } 1 \leq i < s}$$

Siehe Bild 76c.

$i < s$: Weniger als s Servicestellen sind aktiv; Warteschlange ist leer

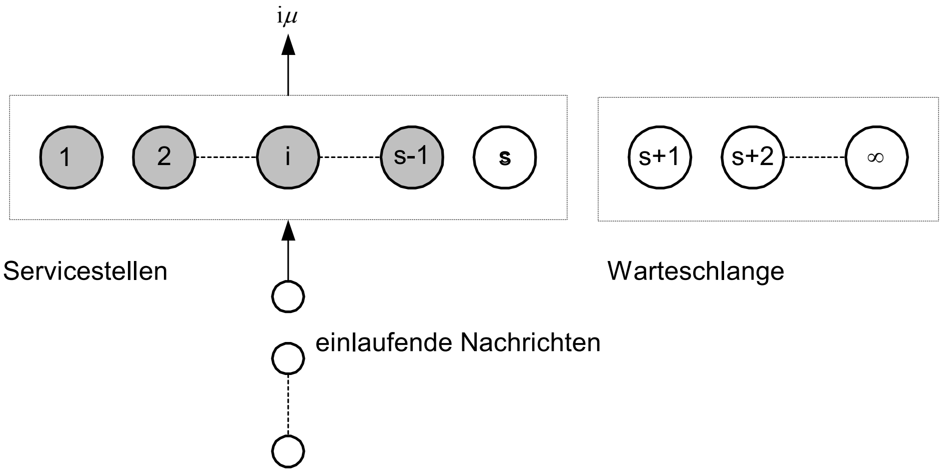


Bild 76c: Service-Raten für i < s

Wir fassen die kombinierten Service-Raten für das M/M/s-Multiserver-System wie folgt zusammen:

$$\boxed{\mu_i = \begin{cases} i\mu & ;(1 \le i < s) \\ s\mu & ;(i \ge s) \end{cases}}$$

Die gewonnenen Erkenntnisse erlauben es, auch für das M/M/s-Warteschlangensystem einen birth and death-Prozess zu modellieren. Das folgende Bild 77 zeigt das Diagramm zusammen mit den spezifischen Übergangsraten.

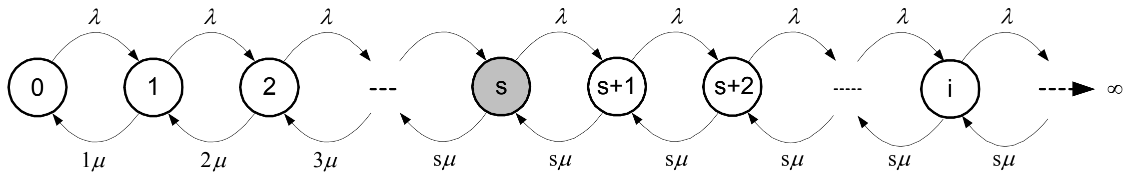


Bild 77: Modellierung des M/M/s-Warteschlangensystems

Unser Interesse gilt jetzt der Grenzwahrscheinlichkeit π_i. Dafür beziehen wir uns auf die Gleichungen auf Seite 281.

$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$, $\pi_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0$, $\pi_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0$, ... Erkennbar gilt allgemein

$\pi_i = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdots\cdots\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\pi_0$. Wegen $\lambda_i = \lambda$ (konstante Last) resultiert hieraus

$$\boxed{\pi_i = \frac{\lambda}{\mu_1}\cdot\frac{\lambda}{\mu_2}\cdot\frac{\lambda}{\mu_3}\cdots\cdots\frac{\lambda}{\mu_i}\pi_0}$$

• Liegt i im Bereich $0 \le i < s$, dann lautet der Wertevorrat der Service-Raten $\{\mu_1 = 1\mu, \quad \mu_2 = 2\mu, \quad \mu_3 = 3\mu, \cdots\cdots, \mu_i = i\mu\}$. Ihr Einsatz in die obige Gleichung führt zur Grenzwahrscheinlichkeit

$$\pi_i = \frac{\lambda}{1\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{3\mu} \cdots\cdots\cdots \frac{\lambda}{i\mu} \pi_0 = \frac{\lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots i\mu^i} \pi_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\pi_i = \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} \pi_0}$$

• Liegt i jenseits von $0 \le i < s$, also im Bereich $i \ge s$, dann lautet der erweiterte Wertevorrat der Service-Raten $\{1\mu, 2\mu, 3\mu, \ldots\ldots, s\mu, \quad s\mu, s\mu, \ldots\ldots, s\mu\}$. Eingesetzt in die Gleichung

$$\pi_i = \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda}{\mu_3} \cdots\cdots\cdots \frac{\lambda}{\mu_i} \pi_0 \quad \text{liefert} \quad \pi_i = \frac{\lambda}{1\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{3\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{s\mu} \cdot \frac{\lambda}{s\mu} \cdot \frac{\lambda}{s\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{s\mu} \pi_0$$

Zur Vereinfachung des Nenners gehen wir folgendermaßen vor. Gemäß der folgenden Skizze unterteilen wir ihn in die beiden Abschnitte s (Anzahl der aktiven Server) und i-s (Anzahl der wartenden Nachrichten).

$$\underbrace{\overbrace{1\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots\cdots s\mu}^{s} \;\vdots\; \overbrace{s\mu \cdot s\mu \cdots\cdots s\mu}^{i-s}}_{i}$$

Wir erkennen für den Abschnitt s die Gleichung $1\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots\cdots s\mu = s!\mu^s$ und für den Abschnitt i-s die Gleichung $s\mu \cdot s\mu \cdots\cdots s\mu = s^{i-s}\mu^{i-s}$. Somit lautet der vereinfachte Nenner

$1\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu \cdots\cdots s\mu \quad \cdot \quad s\mu \cdot s\mu \cdots\cdots s\mu = s!\mu^s \cdot s^{i-s}\mu^{i-s} = s!s^{i-s}\mu^i$. Mit ihm erhalten wir für

$i \ge s$ die Grenzwahrscheinlichkeit π_i zu

$$\pi_i = \frac{\lambda}{1\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{3\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{s\mu} \cdot \frac{\lambda}{s\mu} \cdot \frac{\lambda}{s\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{s\mu} \pi_0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} \pi_0}$$

Zusammengefasst schreiben wir:

$$\boxed{\pi_i = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i}{i!\mu^i} \pi_0 & ;(0 \le i < s) \\[2ex] \dfrac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} \pi_0 & ;(i \ge s) \end{cases}}$$

Zur Bestimmung des stationären Ruhezustands π_0 nutzen wir die Summengleichung $\sum_{i=0}^{s-1}\pi_i + \sum_{i=s}^{\infty}\pi_i = 1$. Wir setzen die relevanten Grenzwahrscheinlichkeiten π_i ein und erhalten

$\pi_0 \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} = 1$. Die Division beider Seiten durch π_0 führt zu

$\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} = \frac{1}{\pi_0}$. Woraus sich durch Umstellung der stationäre

Ruhezustand π_0 des M/M/s-Systems wie folgt berechnet:

$$\boxed{\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} \right)^{-1}}$$

Bekanntlich liegt für $i \geq s$ die kombinierte Service-Rate bei $s\mu$. In diesem Bereich ist demnach die **mittlere Bearbeitungszeit** gegeben durch $\boxed{\frac{1}{s\mu}}$. Hiermit modifiziert sich die **Verkehrsintensität** zu $\boxed{p = \frac{\lambda}{s\mu} < 1}$. Das bisherige $p = \frac{\lambda}{\mu}$ benennen wir um zu $\boxed{q = \frac{\lambda}{\mu}}$ und setzen diese Größe in die obige Formel zur Berechnung von π_0 ein. Es ergibt sich:

$$\boxed{\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} \right)^{-1}}$$

Was bedeutet die Größe $q = \frac{\lambda}{\mu}$ im M/M/s-System? Angenommen, das System ist mit s=4 Servern ausgestattet und es empfängt in einem Poissonstrom $\lambda = 18$ Nachrichten pro Minute. Es sei weiter angenommen, jeder Server bearbeitet pro Minute $\mu = 6$ Nachrichten. Somit bearbeiten parallel 3 der 4 Server $3 \cdot 6 = 18$ Nachrichten pro Minute, während 1 Server untätig bleibt. Die Anzahl der aktiven Server berechnen wir mit $q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{18}{6} = 3$.

Was bedeutet die Größe $p = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ im M/M/s-System? Die Einhaltung der Bedingung p < 1 lässt die Warteschlange nicht ins Unendliche wachsen. Mit $\lambda = 18$, $\mu = 6$ und $s = 4$ ergibt sich die Verkehrsintensität zu $p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{18}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$. Nun ist der stationäre Ruhezustand eines einzelnen beliebigen Servers gegeben durch $P(T_S =) = \pi_0 = 1 - p \;=\; 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. In Worten, jeder Server befindet sich in 1/4 der Zeit im Ruhezustand.

Unser Interesse gilt der unendlichen Reihe in der Formel $\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} \right)^{-1}$. Wir wollen sie auflösen und gehen dafür folgendermaßen vor. Der Einsatz der Substitution $q^i = q^{i+s-s} = q^s q^{i-s}$ führt zu $\frac{q^s}{s!} \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^{i-s}}{s^{i-s}} = \frac{q^s}{s!} \sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{q}{s}\right)^{i-s}$. Da die Summation ab i=s beginnt, lautet das erste Glied der Reihe $\left(\frac{q}{s}\right)^{s-s} = \left(\frac{q}{s}\right)^{0}$. So können wir die Summation ab m=0 beginnen. Hiermit folgt $\frac{q^s}{s!} \sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{q}{s}\right)^{i-s} = \frac{q^s}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{q}{s}\right)^{m}$. Mit dem Grenzwert der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{q}{s}\right)^{m} = \frac{1}{1-\frac{q}{s}}$ erhalten wir sodann für $\frac{q^s}{s!} \sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{q}{s}\right)^{i-s} = \frac{q^s}{s!(1-\frac{q}{s})}$. Der Einsatz von $p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{q}{s}$ führt schließlich zu $\frac{q^s}{s!(1-\frac{q}{s})} = \frac{q^s}{s!(1-p)}$. Hiermit bekommt der stationäre Ruhezustand π_0 des M/M/s-Systems die folgende einfachere Form:

$$\boxed{\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)} \right)^{-1}}$$

Setzen wir in dieser Formel s=1, dann reduziert sich π_0 auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems. Mit $q = \lambda/\mu, p = \lambda/s\mu \to \lambda/\mu$ ergibt sich:

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{1-1} \frac{q^0}{0!} + \frac{q^1}{1!(1-p)} \right)^{-1} = \left(\frac{q^0}{0!} + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-p} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{p}{1-p} \right)^{-1} \quad \to \quad \pi_0 = \left(\frac{1-p+p}{1-p} \right)^{-1} = 1-p\,.$$

(vgl. Seite 284)

3.4.4.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_S)$ in der Warteschlange

Befinden sich $i \geq s$ Nachrichten im System, dann sind s Server parallel tätig, während sich i-s Nachrichten in der Warteschlange aufhalten. Es sei L_S die Zufallsvariable, die die Anzahl der i-s Nachrichten in der Warteschlange annimmt. Die mittlere Anzahl von i-s, d.h. der Erwartungswert $E(L_S)$, ist demnach gegeben durch: $E(L_S) = \sum_{i=s+1}^{\infty} (i-s)\pi_i$. Für $i \geq s$ folgt mit

$\pi_i = \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i}\pi_0 = \frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0$ der Erwartungswert $E(L_S) = \sum_{i=s+1}^{\infty} (i-s)\frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0$.

Wir lösen die Summe auf und gehen dafür folgendermaßen vor:

$$E(L_S)=\sum_{i=s+1}^{\infty}(i-s)\frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0=\frac{\pi_0}{s!}\sum_{i=s+1}^{\infty}(i-s)\frac{q^{i-s+s}}{s^{i-s}}=\frac{q^s}{s!}\pi_0\sum_{i=s+1}^{\infty}(i-s)\frac{q^{i-s}}{s^{i-s}}$$

$=\frac{q^s}{s!}\pi_0\sum_{i=s+1}^{\infty}(i-s)p^{i-s}$. Da die Summation ab i=s+1 beginnt, lautet das erste Glied der Reihe $(s+1-s)p^{s+1-s}=1\cdot p^1$. So können wir die Summation ab m=1 beginnen. Hiermit folgt

$$E(L_S)=\frac{q^s}{s!}\pi_0\sum_{i=s+1}^{\infty}(i-s)p^{i-s}=\frac{q^s}{s!}\pi_0\sum_{m=1}^{\infty}mp^m=\frac{q^s p}{s!}\pi_0\sum_{m=1}^{\infty}mp^{m-1}$$

$$=\frac{q^s p}{s!}\pi_0\sum_{m=1}^{\infty}mp^{m-1}==\frac{q^s p}{s!}\pi_0\frac{d}{dp}\left(\sum_{m=0}^{\infty}p^m\right)=\frac{q^s p}{s!}\pi_0\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right)=\frac{q^s p}{s!}\pi_0\frac{d}{dp}(1-p)^{-1}$$

$=-1\cdot\frac{q^s p}{s!}\pi_0(1-p)^{-2}\cdot -1$. Also ist die mittlere Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange gegeben durch

$$\boxed{E(L_S)=\frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0}$$

Setzen wir in dieser Formel s=1, dann reduziert sich $E(L_S)$ auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems. Mit $q=\lambda/\mu, p=\lambda/s\mu\rightarrow\lambda/\mu$ ergibt sich:

$$E(L_S)=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 p}{1!(1-p)^2}(1-p)=\frac{p^2}{1!(1-p)}\quad\rightarrow\quad\boxed{E(L_S)=\frac{p^2}{(1-p)}}$$ (vgl. Seite 286)

3.4.4.2 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_S)$ in der Warteschlange

Es sei T_S die Zufallsvariable, die die Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange bis zu ihrer Bearbeitung annimmt. Wir erhalten $E(T_S)$ durch Umstellung der Formel von Little:

$E(L_S)=\lambda\cdot E(T_S)\quad\rightarrow\quad E(T_S)=\frac{E(L_S)}{\lambda}$. Wir setzen $E(L_S)=\frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0$ ein und erhalten

$E(T_S)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0$. Die Nutzung von $p=\frac{\lambda}{s\mu}$ führt schließlich zu

$$\boxed{E(T_S)=\frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0}$$

Mit s=1 reduziert sich $E(T_S)$ auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems.

Mit $q = \lambda / \mu, p = \lambda / s\mu \rightarrow \lambda / \mu$ ergibt sich:

$$E(T_S) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1}{1!(1\mu)(1-p)^2}(1-p) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1-p)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1-\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu(\mu-\lambda)}{\mu}} = \boxed{\frac{\lambda}{(\mu-\lambda)\mu}}$$ (vgl. Seite 286)

3.4.4.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T)$ im System

Es sei T die Zufallsvariable, die die Aufenthaltszeit einer Nachricht im System annimmt. Durch Umstellung der Gleichung $E(T_S) = E(T) - \frac{1}{\mu}$ (siehe Seite 286) erhalten wir

$E(T) = E(T_S) + \frac{1}{\mu}$. Wir setzen $E(T_S) = \frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0$ ein und erhalten

$$\boxed{E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0}$$

Mit s=1 reduziert sich $E(T)$ auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems.
Mit $q = \lambda / \mu, p = \lambda / s\mu \rightarrow \lambda / \mu$ ergibt sich:

$$E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1}{1!(1\mu)(1-p)^2}(1-p) = \frac{1}{\mu} + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu(1-p)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\mu(\mu-\lambda)}{\mu}} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)\mu} = \boxed{E(T_S) + \frac{1}{\mu}}$$

(vgl. Seite 288)

3.4.4.4 Die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L)$ im System

Es sei L die Zufallsvariable, die die Anzahl der i Nachrichten im System annimmt.
Wir berechnen $E(L)$ mit der Formel von Little: $E(L) = \lambda \cdot E(T)$ oder alternativ mit $E(L) = E(L_S) + p$ (siehe Seite 288). Wir können die zweite Formel auch für das M/M/s-System nutzen, wenn wir das p durch q ersetzen. Demzufolge gilt: $E(L) = E(L_S) + q$. Der Einsatz von $E(L_S) = \frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0$ führt sodann zu $\boxed{E(L) = q + \frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0}$

Mit s=1 reduziert sich $E(L)$ auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems.
Mit $q = \lambda / \mu, p = \lambda / s\mu \rightarrow \lambda / \mu$ ergibt sich:

$$E(L) = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 p}{1!(1-p)^2}(1-p) = p + \frac{p^2}{1-p} = \frac{p(1-p)+p^2}{1-p} = \frac{p-p^2+p^2}{1-p} = \boxed{\frac{p}{1-p}}$$ (vgl. Seite 284)

3.4.4.5 Die Erlang´sche C-Formel

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit mit der eine Nachricht in der Warteschlange verweilen muss, ehe sie von einem Server bearbeitet wird. Dafür gehen wir folgendermaßen vor.

• Liegt i im Bereich $0 \le i < s$, dann haben die Server genügend Aufnahmekapazität. Eine neu ankommende Nachricht kann somit unverzüglich bearbeitet werden. Wir bezeichnen mit $P(T_s = 0)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Nachricht ohne Aufenthalt in der Warteschlange, also **ohne** Verzögerung, zu einem Server gelangt. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $P(T_s = 0) = P(i \le s-1;\ i = 0,1,\ldots,s-1) = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i$. Der Ansatz beruht auf folgenden Überlegungen:

Befindet sich das System im Zustand S_i mit i = {s}, dann sind alle s Server im Einsatz. Neu ankommende Nachrichten müssen sich demzufolge in die Warteschlange einreihen. Befindet sich dagegen das System im Zustand S_i mit i = {0,1,2,.......s−1}, dann ist mindestens 1 Server untätig. Eine neu ankommende Nachricht kann deshalb ohne Aufenthaltszeit in der Warteschlange bedient werden.
Da sich das System mit Sicherheit in einem der Zustände $S_0, S_1, S_2, \ldots\ldots, S_{s-1}$ befindet und sich außerdem die Zustände paarweise gegenseitig ausschließen, lassen sie sich vereinigen zu $\Omega = \{S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots\ldots \cup S_{s-1}\}$ mit $P(\Omega) = 1$. Nach dem Additionsaxiom erhalten wir hiervon $P(S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots\ldots \cup S_{s-1}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + \ldots\ldots + P(S_{s-1})$. Und mit $P(S_i) = \pi_i$;i = {0,1,2,.......s−1} (stationärer Zustand) ergibt sich $P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + \ldots\ldots + P(S_{s-1}) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots\ldots + \pi_{s-1} = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i$. Diese Summe ist aber nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit, mit der eine neu ankommende Nachricht **ohne** Verzögerung zu einem der Server gelangt.

Wir erhalten aus $P(T_s = 0) = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} \pi_0 = \pi_0 \sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!}$ (vgl. Seite 314). Zur Berechnung von $\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!}$ benutzen wir die Formel $\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)} \right)^{-1}$ (vgl. Seite 316). Aus ihr folgt $\frac{1}{\pi_0} = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)}$ und durch Umstellung ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} = \frac{1}{\pi_0} - \frac{q^s}{s!(1-p)}.$$

Hiermit gestaltet sich $P(T_s = 0)$ wie folgt:

$$P(T_s = 0) = \pi_0 \sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} = \pi_0 \left(\frac{1}{\pi_0} - \frac{q^s}{s!(1-p)} \right) \rightarrow \boxed{P(T_s = 0) = 1 - \frac{q^s}{s!(1-p)} \pi_0 = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i}$$

Mit s=1 reduziert sich $P(T_S = 0)$ auf die Gleichung des **M/M/1**-Warteschlangensystems (vgl. Seite 299). Mit $q = \lambda / \mu, p = \lambda / s\mu \rightarrow \lambda / \mu$ und $\pi_0 = 1 - p$ ergibt sich:

$$P(T_S = 0) = 1 - \frac{q^1}{1!(1-p)} \pi_0 = 1 - \frac{p(1-p)}{(1-p)} = \boxed{1-p}$$

• Liegt i im Bereich $i \geq s$, dann sind alle Server tätig. Eine neu ankommende Nachricht kann deshalb nicht sofort bearbeitet werden, sie muss sich stattdessen in die Warteschlange einreihen und dort warten. Wir bezeichnen mit $C(s,q) = 1 - P(T_S = 0)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Nachricht **mit** Verzögerung zu einem Server gelangt. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$C(s,q) = 1 - P(T_S = 0) = 1 - \left(1 - \frac{q^s}{s!(1-p)} \pi_0\right) = \frac{q^s}{s!(1-p)} \pi_0 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{C(s,q) = \frac{q^s}{s!(1-p)} \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)} \right)^{-1}}$$

Die Gleichung ist als *Erlang´sche C-Formel* bekannt. Sie liefert als Funktion von s und q die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Nachricht verzögert bearbeitet wird?

Beispiel:

In einem Multiserver-System mit 3 Druckern kommen im Mittel 24 Aufträge pro Stunde an. Wegen der umfänglichen Seitenzahlen schafft jeder Drucker durchschnittlich 10 Aufträge pro Stunde.

1, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein Druckauftrag verzögert bearbeitet wird?

Es gilt: $s = 3 \rightarrow s - 1 = 2$; $\lambda = 24; \mu = 10; q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{10} = 2{,}4; p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{3 \cdot 10} = 0{,}8.$ Die Berechnung erfolgt mit der Erlang´schen C-Formel. Sie liefert

$$C(s,q) = \frac{2{,}4^3}{3!(1-0{,}8)} \left(\frac{2{,}4^0}{0!} + \frac{2{,}4^1}{1!} + \frac{2{,}4^2}{2!} + \frac{2{,}4^3}{3!(1-0{,}8)} \right)^{-1} = \frac{13{,}824}{1{,}2} \left(1 + 2{,}4 + 2{,}88 + \frac{13{,}824}{1{,}2} \right)^{-1} \quad \rightarrow$$

C(s,q)=11,52:17,8 = <u>0,6472</u>

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Druckauftrag verzögert angenommen wird, liegt bei 64,72%.
Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Druckauftrag ohne Verzögerung bearbeitet wird, berechnet sich zu 1−C(s,q) = 1−0,6472 = <u>0,3528</u> = 35,28%.

2, Wir stellen die Forderung, dass die Wahrscheinlichkeit für eine unverzögerte Bearbeitung bei mindestens 90% liegen soll. Dafür inkrementieren wir s solange bis die Forderung 1−C(s,q) $\geq$ 0,9 erfüllt ist.

1ter Versuch: $s = 4 \to s - 1 = 3$; $\lambda = 24; \mu = 10; q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{10} = 2{,}4; p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{4 \cdot 10} = 0{,}6.$ Mit

$$C(s,q) = \frac{2{,}4^4}{4!(1-0{,}6)} \left(\frac{2{,}4^0}{0!} + \frac{2{,}4^1}{1!} + \frac{2{,}4^2}{2!} + \frac{2{,}4^3}{3!} + \frac{2{,}4^4}{4!(1-0{,}6)} \right)^{-1} = 0{,}287 \text{ ergibt sich}$$

1−C(s,q) = 1−0,287 = <u>0,713</u> = 71,3%. Die Forderung ist nicht erfüllt!

2ter Versuch: $s = 5 \to s - 1 = 4$; $\lambda = 24; \mu = 10; q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{10} = 2{,}4; p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{5 \cdot 10} = 0{,}48.$ Mit

$$C(s,q) = \frac{2{,}4^5}{5!(1-0{,}48)} \left(\frac{2{,}4^0}{0!} + \frac{2{,}4^1}{1!} + \frac{2{,}4^2}{2!} + \frac{2{,}4^3}{3!} + \frac{2{,}4^4}{4!} + \frac{2{,}4^5}{5!(1-0{,}48)} \right)^{-1} = 0{,}1135 \text{ ergibt sich}$$

1−C(s,q) = 1−0,1135 = <u>0,8865</u> = 88,65%. Die Forderung ist nicht erfüllt!

3ter Versuch: $s = 6 \to s - 1 = 5$; $\lambda = 24; \mu = 10; q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{10} = 2{,}4; p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{6 \cdot 10} = 0{,}4.$ Mit

$$C(s,q) = \frac{2{,}4^6}{6!(1-0{,}4)} \left(\frac{2{,}4^0}{0!} + \frac{2{,}4^1}{1!} + \frac{2{,}4^2}{2!} + \frac{2{,}4^3}{3!} + \frac{2{,}4^4}{4!} + \frac{2{,}4^5}{5!} + \frac{2{,}4^6}{6!(1-0{,}4)} \right)^{-1} = 0{,}04 \text{ ergibt sich}$$

1−C(s,q) = 1−0,04 = <u>0,96</u> = 96%. Jetzt ist die Forderung erfüllt.

Wir erkennen, dass s=6 die minimale Anzahl von Druckern ist, die der Anforderung genügen.

3, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit der ein Druckauftrag unverzögert bearbeitet wird?

Es gelte weiterhin: $s = 3$; $\lambda = 24; \mu = 10; q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{10} = 2{,}4; p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{3 \cdot 10} = 0{,}8.$

Die Berechnung erfolgt mit $P(T_S = 0) = 1 - \frac{2{,}4^3}{3!(1-0{,}8)}\pi_0 = 1 - \frac{13{,}824}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0{,}2}\pi_0 = 1 - 11{,}52 \cdot \pi_0$.

$$\text{Mit } \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)} \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{2} \frac{2{,}4^i}{i!} + \frac{2{,}4^3}{3!(1-0{,}8)} \right)^{-1} = \left(\frac{2{,}4^0}{0!} + \frac{2{,}4^1}{1!} + \frac{2{,}4^2}{2!} + 11{,}52 \right)^{-1}$$

$\pi_0 = (1 + 2{,}4 + 2{,}88 + 11{,}52)^{-1} = 17{,}8^{-1} = 0{,}0562$ erhalten wir

$P(T_S = 0) = 1 - 11{,}52 \cdot 0{,}0562 = 1 - 0{,}6472 =$ <u>0,3528</u> = 1 − C(s,q) = 1 − 0,6472 . (vgl. Aufgabe 1)

Eine Vergleichsrechnung mit $P(T_S = 0) = \sum_{i=0}^{s-1} \pi_i = \sum_{i=0}^{2} \pi_i = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 0{,}0562 + \pi_1 + \pi_2$ soll das Ergebnis bestätigen. Mit $\pi_i = \frac{q^i}{i!}\pi_0$ berechnen wir noch die fehlenden π_1 und π_2.

$\pi_1 = \frac{2{,}4^1}{1!} \cdot 0{,}0562 = 0{,}1349$ und $\pi_2 = \frac{2{,}4^2}{2!} \cdot 0{,}0562 = 0{,}1619$. So liefert die alternative

Berechnung $P(T_s = 0) = \sum_{i=0}^{2} \pi_i = 0{,}0562 + 0{,}1349 + 0{,}1619 = \underline{0{,}353}$ und bestätigt das obige Ergebnis (0,3528).

3.4.4.6 Die Verteilung der Zufallsvariablen T_s = Wartezeit in der Warteschlange

Zur Herleitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeit $P(T_s \leq t)$ folgen wir dem Ansatz von Donald Gross et al. und gehen dafür folgendermaßen vor. Unser Interesse gehört dem Bereich $i \geq s$.

• Wir bezeichnen mit S_i das Ereignis „*das Multiserver-System befindet sich im Augenblick im Zustand i*". Wegen $i \geq s$ hat i den Wertevorrat $i = \{s, s+1, s+2, s+3, \ldots\ldots\}$ (siehe Bild 78). Alle S_i schließen sich paarweise gegenseitig aus und eines von ihnen tritt mit Sicherheit in Erscheinung. Deswegen lassen sie sich vereinigen zu $\Omega = \{S_s \cup S_{s+1} \cup S_{s+2} \cup S_{s+3} \ldots\ldots\}$ mit $P(\Omega) = 1$.

• Wir bezeichnen als nächstes mit B das Ereignis „*in der Zeit $\leq t$ werden n Bearbeitungen abgeschlossen*".

Dabei ist n (Anzahl der Bearbeitungen) abhängig vom augenblicklichen Zustand i des Systems und der Anzahl s der Server. Betrachten wir dazu das Bild 78:

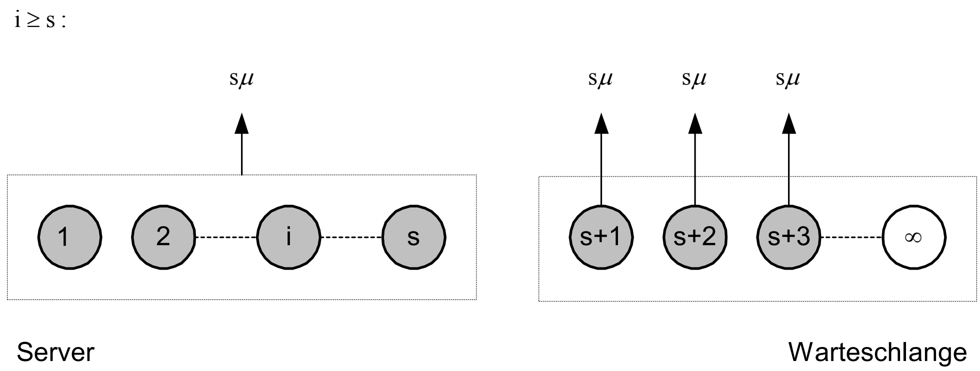


Bild 78: Ermittlung von n = Anzahl der Bearbeitungen in ≤ t

Wir erkennen s aktive Server und i−s wartende Nachrichten. Folglich ist die Anzahl der Bearbeitungen, die in der Zeit ≤ t abgeschlossen werden, gegeben durch n = i−s+1. Ist z.B. i=7 und s=4, dann resultieren n = 7−4+1 = 4 Bearbeitungen.

Die Anzahl der in der Zeit $\leq t$ abgeschlossenen Bearbeitungen (*Ereignis B*) tritt naturgemäß immer zusammen mit dem Zustand i des Systems auf (*Ereignis* S_i). Dafür schreiben wir: $B = (S_s \cap B) \cup (S_{s+1} \cap B) \cup (S_{s+2} \cap B) \cup \ldots\ldots$ Und weil die Ereignisse $S_i \cap B$ und $S_j \cap B$ mit $S_i \neq S_j = s, s+1, s+2, s+3, \ldots\ldots$ unvereinbar sind, gilt nach dem Additionstheorem

$$P(B) = P(S_s \cap B) + (S_{s+1} \cap B) + (S_{s+2} \cap B) + \ldots\ldots \text{ bzw.}$$
$$P(B) = P(S_s B) + (S_{s+1} B) + (S_{s+2} B) + \ldots\ldots$$

Der Einsatz des Multiplikationssatzes für abhängige Ereignisse führt schließlich zur totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = P(B/S_s)P(S_s) + P(B/S_{s+1})P(S_{s+1}) + P(B/S_{s+2})P(S_{s+2}) + \cdots\cdots$$

oder kurz: $\quad P(B) = \sum_{i=s}^{\infty} P(B/S_i)P(S_i) \quad ; i = s, s+1, s+2, s+3, \cdots\cdots$

Für $P(B/S_i)$ schreiben wir anschaulich

$$P(B/S_i) = P(i-s+1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \le t / \text{Zustand } i)$$

Zusammen mit $P(S_i) = \pi_i$ (stationärer Zustand) und n = i−s+1
erhalten wir für $i \ge s$ die **totale** Wahrscheinlichkeit der in der Zeit $\le t$ abgeschlossenen Bearbeitungen in der Form:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=s}^{\infty} P(i-s+1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \le t / \text{Zustand } i) \cdot \pi_i}$$

Da eine neu ankommende Nachricht unverzüglich zu den Servern gelangen kann, muss die Wahrscheinlichkeit hierfür noch additiv berücksichtigt werden. Sie lautet $P(T_s = 0)$. Mit ihr ist die **totale** Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bearbeitungszeit gegeben durch:

$$\boxed{P(T_s \le t) = P(T_s = 0) + \sum_{i=s}^{\infty} P(i-s+1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \le t / \text{Zustand } i) \cdot \pi_i}$$

Zur Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(t) = \sum_{i=s}^{\infty} P(i-s+1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \le t / \text{Zustand } i)$$

nutzen wir die Erlang-Verteilung, die wegen n = i−s+1 vom Typ i−s+1 ist. Da i im Bereich $i \ge s$ liegt, liefert das M/M/s-System einen Poisson-Ausgangsstrom mit der Service-Rate $s\mu$.
Mit x = τ und den Integrationgrenzen im Intervall [0,t] modifiziert sich die Erlang-Verteilung

$$F(x) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\mu x} dx \quad \text{zu}$$

$$F(t) = \frac{(s\mu)^{i-s+1}}{(i-s+1-1)!} \int_0^t \tau^{i-s+1-1} e^{-s\mu\tau} d\tau = \frac{s\mu(s\mu)^{i-s}}{(i-s)!} \int_0^t \tau^{i-s} e^{-s\mu\tau} d\tau$$

Der Einsatz von $\sum_{i=s}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} \pi_0$ (siehe Seite 314) führt sodann zur totalen

Wahrscheinlichkeit der in der Zeit $\le t$ abgeschlossenen Bearbeitungen. Sie lautet:

$$P(B) = \frac{s\mu(s\mu)^{i-s}}{(i-s)!} \int_0^t \tau^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} d\tau$$

Hiermit gestaltet sich die totale Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bearbeitungszeit wie folgt:

$$\boxed{P(T_S \le t) = P(T_S = 0) + \frac{s\mu(s\mu)^{i-s}}{(i-s)!} \int_0^t \tau^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} d\tau}$$

Wir vereinfachen die Gleichung nun Schritt für Schritt und beginnen mit

$$P(T_S \le t) = P(T_S = 0) + \frac{s \cdot s^{i-s} \mu^{i-s}}{(i-s)!} \int_0^t \mu \cdot \tau^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^{i-s} q^s}{s!s^{i-s}} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \frac{s}{(i-s)!} \int_0^t \mu \cdot (\mu\tau)^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^{i-s} q^s s^{i-s}}{s!s^{i-s}} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \frac{s}{(i-s)!} \int_0^t \mu \cdot (\mu\tau)^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \pi_0 \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^{i-s} q^s}{s!} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{s \cdot q^s}{s!} \int_0^t \mu \cdot (\mu\tau)^{i-s} e^{-s\mu\tau} \cdot \sum_{i=s}^{\infty} \frac{q^{i-s}}{(i-s)!} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{s \cdot q^s}{s!} \int_0^t \mu\, e^{-s\mu\tau} \cdot \sum_{i=s}^{\infty} \frac{(q\mu\tau)^{i-s}}{(i-s)!} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{s \cdot q^s}{s!} \int_0^t \mu\, e^{-s\mu\tau} e^{q\mu\tau} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{s \cdot q^s}{s!} \int_0^t \mu\, e^{-\mu(s-q)\tau} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{s \cdot q^s}{(s-1)!s} \int_0^t \mu\, e^{-\mu(s-q)\tau} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) + \pi_0 \frac{q^s}{(s-1)!(s-q)} \int_0^t \mu(s-q)\, e^{-\mu(s-q)\tau} d\tau$$

$$= P(T_S = 0) - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{(s-1)!(s-q)} \cdot \frac{\mu(s-q)}{\mu(s-q)} e^{-\mu(s-q)\tau} \Big|_0^t$$

$$= P(T_S = 0) - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{(s-1)!(s-q)} \cdot e^{-\mu(s-q)t} - - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{(s-1)!(s-q)} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{P(T_S \le t) = P(T_S = 0) + \frac{\pi_0 \cdot q^s}{(s-1)!(s-q)}\left(1 - e^{-\mu(s-q)t}\right)}$$

Wir vereinfachen weiter und nehmen uns das Produkt $(s-1)!(s-q)$ im Nenner der Gleichung vor.

Aus $p = \frac{\lambda}{s\mu}$ und $q = \frac{\lambda}{\mu}$ folgt $p = \frac{q}{s}$ und hieraus ps = q. Hiermit formt sich das Produkt zu $(s-1)!(s-q) = (s-1)!(s-ps) = (s-1)! \cdot s(1-p) = s!(1-p)$. Eingesetzt in die Gleichung $P(T_S \le t)$

führt zu

$P(T_S \le t) = P(T_S = 0) + \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)}\left(1 - e^{-\mu(s-q)t}\right)$. Mit $P(T_S = 0) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)}$ (siehe Seite 319)

finden wir

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} + \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)}\left(1 - e^{-\mu(s-q)t}\right) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} + \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} e^{-\mu(s-q)t}$$

$$= 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} e^{-\mu(s-q)t} = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

Somit ist die Verteilungsfunktion der Wartezeit T_S in der Warteschlange des M/M/s-Systems gegeben durch

$$\boxed{F(t) = P(T_S \le t) = \begin{cases} 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} e^{-(s\mu-\lambda)t} & ;\text{für } t > 0 \\ 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} & ;\text{für } t = 0 \end{cases}}$$

Setzen wir s=1, dann reduziert sich die Verteilungsfunktion $F(t) = P(T_S \le t)$ auf die Gleichungen der M/M/1-Warteschlange (vgl. Seite 299). Mit $q = \lambda/\mu, p = \lambda/s\mu \to \lambda/\mu$ ergeben sich:

1, $t > 0$:

$$F(t) = P(T_S \le t) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^1}{1!(1-p)} e^{-(1\mu-\lambda)t} = 1 - \frac{(1-p)p}{1(1-p)} e^{-(\mu-\lambda)t} = 1 - pe^{-(\mu-\lambda)t}$$

2, $t = 0$:

$$F(t) = P(T_S = t) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^1}{1!(1-p)} = 1 - \frac{(1-p)p}{(1-p)} = 1 - p$$

In Anlehnung an $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ erhalten wir aus der Verteilungsfunktion F(t) die **Dichtefunktion** f(t).

Es gilt: $$f(t)=\frac{d\left(1-\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}e^{-(s\mu-\lambda)t}\right)}{dt}=\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}(s\mu-\lambda)e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

Somit ist die Dichtefunktion der exponentialverteilten Zufallsvariablen T_S gegeben durch

$$\boxed{f(t)=\begin{cases}\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}(s\mu-\lambda)e^{-(s\mu-\lambda)t} & ;\text{für } t>0\\[2ex] \frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}(s\mu-\lambda) & ;\text{für } t=0\end{cases}}$$

Setzen wir s=1, dann reduziert sich auch die Dichtefunktion f(t) auf die Gleichungen der M/M/1-Warteschlange (vgl. Seite 300). Mit $q=\lambda/\mu, p=\lambda/s\mu\to\lambda/\mu$ ergeben sich:

1, $t>0$:

$$f(t)=\frac{\pi_0\cdot q^1}{1!(1-p)}(1\cdot\mu-\lambda)e^{-(1\cdot\mu-\lambda)t}=\frac{(1-p)p}{(1-p)}(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}=\boxed{p(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}}$$

2, $t=0$:

$$f(t)=\frac{\pi_0\cdot q^1}{1!(1-p)}(1\cdot\mu-\lambda)=\frac{(1-p)p}{(1-p)}(\mu-\lambda)=\boxed{p(\mu-\lambda)}$$

Mit dem Ansatz $E(T_S)=\int_0^\infty t\cdot f(t)dt$ (Anfangsmoment 1ter Ordnung = 1tes Moment) finden wir die mittlere Aufenthaltsdauer einer Nachricht in der Warteschlange. Es gilt:

$$E(T_S)=\int_0^\infty t\cdot\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}(s\mu-\lambda)e^{-(s\mu-\lambda)t}dt=\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)}\int_0^\infty t\cdot(s\mu-\lambda)e^{-(s\mu-\lambda)t}dt \text{ mit}$$

$\int_0^\infty t\cdot(s\mu-\lambda)e^{-(s\mu-\lambda)t}dt=\frac{1}{s\mu-\lambda}$ (vgl. Seite 297). So ergibt sich $E(T_S)=\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)(s\mu-\lambda)}$.

Wir wollen die Differenz $s\mu-\lambda$ etwas umgestalten. Aus $p=\frac{\lambda}{s\mu}$ folgt $s\mu p=\lambda$. Eingesetzt in $s\mu-\lambda$ liefert $s\mu-\lambda=s\mu-s\mu p=s\mu(1-p)$. Damit gestaltet sich $E(T_S)$ wie folgt:

$$E(T_S)=\frac{\pi_0\cdot q^s}{s!(1-p)(s\mu)(1-p)}\quad\to\quad\boxed{E(T_S)=\frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0}$$

Das Ergebnis bestätigt die Herleitung auf Seite 317.

Beispiel:

In einem Multiserver-System mit 4 Druckern kommen im Mittel 9 Aufträge in der Minute an. Jeder Drucker bearbeitet im Durchschnitt 3 Aufträge in dieser Zeit.
1, Wie viele Aufträge warten im Mittel in der Warteschlange?
2, Wie groß ist die durchschnittliche Aufenthaltsdauer im System?
3, Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten, mit der ein Auftrag höchstes 40 Sekunden, 20 Sekunden oder 1 Sekunde in der Warteschlange verbleibt?

Es gilt $s = 4 \to s-1 = 3;\ \lambda = 9;\ \mu = 3;\ q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{3} = 3$ (3 der 4 Server bearbeiten 3·3 = 9 Aufträge, während 1 Server untätig bleibt); $p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{9}{4\cdot 3} = \frac{3}{4}$ (in $1-p = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ der Zeit bleibt im Mittel jeder Server untätig).

Wir beginnen mit der Berechnung des stationären Ruhezustands π_0, da er in allen Formeln benutzt wird.

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!(1-p)}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{3^i}{i!} + \frac{3^4}{4!(1-3/4)}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{81}{4!\cdot 1/4}\right)^{-1} = (1+3+4{,}5+4{,}5+13{,}5) = 26{,}5^{-1}$$

$\pi_0 = \underline{0{,}0377}$

1, $E(L_S) = \frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0 = \frac{3^4 \cdot 3/4}{4!(1/4)^2}\pi_0 = \frac{81\cdot 3/4}{24\cdot 0{,}0625}\pi_0 = 40{,}5\cdot 0{,}0377 = \underline{1{,}5269}$

Im Mittel warten 1,5269 Aufträge in der Warteschlange.

2, $E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0$. Wir setzen $E(L_S) = \frac{q^s p}{s!(1-p)^2}\pi_0 = \frac{q^s \lambda}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0$ ein und

erhalten $E(T) = \frac{1}{\mu} + \frac{q^s}{s!(s\mu)(1-p)^2}\pi_0 = \frac{1}{\mu} + \frac{E(L_S)}{\lambda} = \frac{1}{3} + \frac{1{,}5269}{9} = 0{,}3333 + 0{,}1697$

= 0,503 Minuten bzw. <u>30,177</u> Sekunden

Im Mittel hält sich 1 Auftrag 30,177 Sekunden im System auf.

3, **t = 40 Sekunden** = 2/3 Minuten:

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{\pi_0 \cdot q^s}{s!(1-p)} e^{-(s\mu-\lambda)t} = 1 - \frac{\pi_0 \cdot 3^4}{4!(1-3/4)} e^{-(4\cdot 3-9)2/3} = 1 - \frac{0{,}0377\cdot 81}{6} e^{-2}$$

$$= 1 - 0{,}509 \cdot e^{-2} = 1 - 0{,}0689 = \underline{0{,}9311}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit von 93,11% hält sich ein Auftrag höchstes 40 Sekunden in der Warteschlange auf.

t = 20 Sekunden = 1/3 Minute:

$$P(T_S \leq t) = 1 - 0{,}509 \cdot e^{-(4 \cdot 3 - 9) 1/3} = 1 - 0{,}509 \cdot e^{-1}$$
$$= 1 - 0{,}1873 = \underline{0{,}8127}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit von 81,27% hält sich ein Auftrag höchstes 20 Sekunden in der Warteschlange auf.

t = 1 Sekunde = 1/60 Minute:

$$P(T_S \leq t) = 1 - 0{,}509 \cdot e^{-(4 \cdot 3 - 9) 1/60} = 1 - 0{,}509 \cdot e^{-0{,}05}$$
$$= 1 - 0{,}4842 = \underline{0{,}5158}$$

Mit der Wahrscheinlichkeit von 51,58% hält sich ein Auftrag höchstes 1 Sekunde in der Warteschlange auf.

3.4.5 Die M/M/s/k-Multiserver-Warteschlange

Ein M/M/s/k-Multiserver-System besteht aus einer Anzahl von s unabhängigen Servern und einer begrenzten Anzahl von Warteplätzen in der Warteschlange. Gibt k die maximale Anzahl der Plätze im Gesamtsystem an, dann durchläuft i einen Wertevorrat, der im Bereich $(0 \le i \le k)$ liegt. So füllen ankommende Nachrichten das System bis einschließlich k auf, während weitere Nachrichten ab k abgeschnitten werden. Mit anderen Worten die Ankunftsrate λ_i ist 0, wenn immer $i \ge k$ ist. Dies bedeutet, die Verkehrsintensität p muss nicht mehr die Bedingung $p < 1$ erfüllen, sie kann stattdessen $p \neq 1$ sein. Genauso wie für das M/M/s-Warteschlangensystem, kann auch für das M/M/s/k-Warteschlangensystems ein birth and death-Prozess modelliert werden. Das folgende Bild 79 zeigt das Diagramm zusammen mit den spezifischen Übergangsraten.

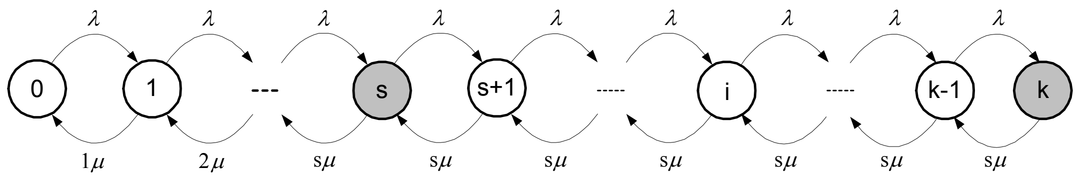


Bild 79: Modellierung des M/M/s/k-Warteschlangensystems

In Anlehnung an die Grenzwahrscheinlichkeiten π_i des M/M/s-Warteschlangensystems (siehe Seite 314) sind wegen des begrenzten Wertevorrats von $i = \{0,1,2, ..., k\}$ die Grenzwahrscheinlichkeiten π_i des M/M/s/k-Warteschlangensystems gegeben durch

$$\pi_i = \begin{cases} \dfrac{\lambda^i}{i!\mu^i}\pi_0 & ;(0 \le i < s) \\[2ex] \dfrac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i}\pi_0 & ;(s \le i \le k) \end{cases}$$

Und auch der stationäre Ruhezustands π_0 ist nahezu identisch mit dem des M/M/s-Warteschlangensystems (siehe Seite 315). Für das M/M/s/k-Warteschlangensystem gilt

$$\pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{s-1} \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} + \sum_{i=s}^{k} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} \right)^{-1}$$

Wir wollen die Gleichung vereinfachen und betrachten die rechte Summation. Mit $q = \dfrac{\lambda}{\mu}$ und

$p = \dfrac{\lambda}{s\mu} \rightarrow p = \dfrac{q}{s}$ folgt $\displaystyle\sum_{i=s}^{k} \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} = \sum_{i=s}^{k} \frac{q^i}{s!s^{i-s}} = \sum_{i=s}^{k} \frac{q^{i+s-s}}{s!s^{i-s}} = \frac{q^s}{s!}\sum_{i=s}^{k} \frac{q^{i-s}}{s^{i-s}} = \frac{q^s}{s!}\sum_{i=s}^{k} p^{i-s}$.

Da die Summation ab $i = s$ beginnt, lautet das erste Glied $p^{s-s} = p^0$. So können wir die Summation ab $m = 0$ beginnen. Zunächst ersetzen wir i durch m und erhalten damit aus

$$\frac{q^s}{s!}\sum_{i=s}^{k} p^{i-s} = \frac{q^s}{s!}\sum_{m=s}^{k} p^{m-s} = \frac{q^s}{s!}\sum_{m=0}^{k-s} p^{m} = \frac{q^s}{s!}\sum_{m=1}^{k-s+1} p^{m-1} = \frac{q^s}{s!}\left(\frac{1-p^{k-s+1}}{1-p}\right).$$

bzw.

$$\boxed{\sum_{i=s}^{k}\frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} = \frac{q^s}{s!}\left(\frac{1-p^{k-s+1}}{1-p}\right) \quad ;\text{für } p \neq 1}$$

Für p = 1 ergibt sich der unbestimmte Ausdruck $\frac{q^s}{s!}\cdot\frac{0}{0}=\frac{0}{0}$. So müssen wir den Grenzwert des Quotienten bestimmen und benutzen dazu die Regel von l´Hospital (siehe Seite 303).

Es gilt $\lim\limits_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{q^s}{s!}\left(\frac{-(k-s+1)p^{k-s}}{-1}\right) = \frac{q^s}{s!}[(k-s+1)p^{k-s}]$. Der Einsatz von p = 1 liefert

$\frac{q^s}{s!}(k-s+1)$ und es ergibt sich

$$\boxed{\sum_{i=s}^{k}\frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i} = \frac{q^s}{s!}(k-s+1) \quad ;\text{für } p = 1}$$

Übersichtlich zusammengefasst ist der stationäre Ruhezustand π_0 des M/M/s/k-Systems sodann gegeben durch

$$\boxed{\pi_0 = \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=0}^{s-1}\frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!}\left(\frac{1-p^{k-s+1}}{1-p}\right)\right]^{-1} & ;\text{für } p \neq 1 \\ \left[\sum\limits_{i=0}^{s-1}\frac{q^i}{i!} + \frac{q^s}{s!}(k-s+1)\right]^{-1} & ;\text{für } p = 1 \end{cases}}$$

3.4.5.1 Die mittlere Anzahl von Nachrichten in der Warteschlange

Befinden sich $i \geq s$ Nachrichten im System, dann sind s Server parallel tätig, während sich i−s Nachrichten in der Warteschlange aufhalten. Es sei L_S die Zufallsvariable, die die Anzahl der i−s Nachrichten in der Warteschlange annimmt. Die mittlere Anzahl von i−s, d.h. der Erwartungswert $E(L_S)$, ist hierfür gegeben durch: $E(L_S) = \sum\limits_{i=s+1}^{k}(i-s)\pi_i$. Für $i \geq s$ folgt mit

$\pi_i = \frac{\lambda^i}{s!s^{i-s}\mu^i}\pi_0 = \frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0$ der Erwartungswert $E(L_S) = \sum\limits_{i=s+1}^{k}(i-s)\frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0$.

Zur Auflösung der Summe gehen dafür folgendermaßen vor.

$$E(L_s) = \sum_{i=s+1}^{k} (i-s)\frac{q^i}{s!s^{i-s}}\pi_0 = \frac{\pi_0}{s!}\sum_{i=s+1}^{k} (i-s)\frac{q^{i-s+s}}{s^{i-s}} = \frac{q^s}{s!}\pi_0 \sum_{i=s+1}^{k} (i-s)\frac{q^{i-s}}{s^{i-s}}$$

$= \frac{q^s}{s!}\pi_0 \sum_{i=s+1}^{k} (i-s)p^{i-s} = \frac{q^s p}{s!}\pi_0 \sum_{i=s+1}^{k} (i-s)p^{i-s-1}$. Wir beachten das i. Es durchläuft den

Wertevorrat i = {s+1, s+2, ..., k} mit |i| = maximale Anzahl der Warteplätze.

Ist z.B. k=7 und s=3, dann lautet der Wertevorrat i = {4,5,6,7} mit |i| = 4 Plätze.
Da die Summation ab i = s+1 beginnt, lautet das erste Glied der Reihe $(s+1-s)p^{s+1-s-1} = p^0$.
So können wir die Summation ab i=1 über $i \cdot p^{i-1}$ bilden und sie bei k−s beenden. Wie kommt diese Obergrenze zustande? Das i durchläuft den Wertevorrat
i = {1,2, ..., k−s}. Hierfür liefert das Zahlenbeispiel k−s = 7 −3 = 4 und i = {1,2,3,4} mit |i| = 4 Plätze. Augenscheinlich gilt

i = {s+1, s+2, ..., k} = {1,2, ..., k−s} mit |i| = maximale Anzahl der Warteplätze.

Und so schreiben wir

$$E(L_s) = \frac{q^s p}{s!}\pi_0 \sum_{i=s+1}^{k} (i-s)p^{i-s-1} = \frac{q^s p\pi_0}{s!}\sum_{i=1}^{k-s} i \cdot p^{i-1} = \frac{q^s p\pi_0}{s!}\frac{d}{dp}\left(\sum_{i=1}^{k-s} p^i\right)$$

$$= \frac{q^s p\pi_0}{s!}\frac{d}{dp}\left(\sum_{i=1}^{k-s+1} p^{i-1}\right) = \frac{q^s p\pi_0}{s!}\frac{d}{dp}\left(\frac{1-p^{k-s+1}}{1-p}\right) = \frac{q^s p\pi_0}{s!}\frac{d}{dp}\left[(1-p^{k-s+1})(1-p)^{-1}\right]$$

Mit der Produktregel $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$ erhalten wir aus $\frac{d}{dp}\left[(1-p^{k-s+1})(1-p)^{-1}\right]$ mit

$$u = 1-p^{k-s+1} \quad \rightarrow \quad u' = -(k-s+1)p^{k-s} \text{ und}$$

$$v = (1-p)^{-1} \quad \rightarrow \quad v' = -(1-p)^{-2} \cdot (-1) = (1-p)^{-2}$$

$$\frac{d}{dp}\left[(1-p^{k-s+1})(1-p)^{-1}\right] = (1-p^{k-s+1})(1-p)^{-2} - (k-s+1)p^{k-s}(1-p)^{-1}$$

$$= \frac{1-p^{k-s+1}}{(1-p)^2} - \frac{(k-s+1)p^{k-s}(1-p)}{(1-p)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\left(1-p^{k-s+1} - (1-p)(k-s+1)p^{k-s}\right)$$

Hiermit ist $E(L_S)$ für $p \neq 1$ gegeben durch

$$\boxed{E(L_S) = \pi_0 \frac{q^s p}{s!} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}\left(1-p^{k-s+1} - (1-p)(k-s+1)p^{k-s}\right) \quad ;p \neq 1}$$

Für p = 1 erhalten wir

$$E(L_S) = \pi_0 \frac{q^s \cdot 1}{s!} \cdot \frac{1}{(1-1)^2}\left(1-1^{k-s+1} - (1-1)(k-s+1) \cdot 1^{k-s}\right) = \frac{q^s \pi_0}{0}(0-0(k-s+1) = \frac{0}{0}$$

Da der Quotient ein unbestimmter Ausdruck ist, müssen wir den Grenzwert des Quotienten bilden. Dies geschieht mit der Regel von l´Hospital $\lim\limits_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und kann als Übung durchgeführt werden. Dabei muss die Regel zweimal angewendet werden. Das Ergebnis lautet:

$$\boxed{E(L_S) = \pi_0 \frac{q^s}{s!}\left(\frac{(k-s)(k-s+1)}{2}\right) \quad ;p = 1}$$

Übersichtlich zusammengefasst ist die mittlere Anzahl von Nachrichten $E(L_S)$ in der Warteschlange des M/M/s/k-Systems gegeben durch

$$\boxed{E(L_S) = \begin{cases} \pi_0 \frac{q^s p}{s!} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}\left(1-p^{k-s+1} - (1-p)(k-s+1)p^{k-s}\right) & ;p \neq 1 \\ \\ \pi_0 \frac{q^s}{s!}\left(\frac{(k-s)(k-s+1)}{2}\right) & ;p = 1 \end{cases}}$$

3.4.5.2 Die mittlere Anzahl von Nachrichten E(L) im System

Es sei L die Zufallsvariable, die die Anzahl der i Nachrichten im System annimmt. Bekanntlich kommen in einem System mit begrenztem Warteraum diejenigen Nachrichten, die das System tatsächlich betreten, mit der effektiven Ankunftsrate λ_{eff} an. Deshalb modifiziert sich die Verkehrsintensität $q = \frac{\lambda}{\mu}$ zur effektiven Verkehrsdichte $q_{eff} = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$.

In Anlehnung an die Gleichung $E(L) = E(L_S) + p$ (siehe Seite 288) berechnen wir damit auch E(L) für das M/M/s/k-System. Dafür ersetzen wir das p durch die effektive Verkehrsdichte q_{eff} und erhalten

$$E(L) = E(L_S) + q_{eff} \quad \rightarrow \quad E(L) = E(L_S) + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}.$$

Mit $\lambda_{eff} = (1-\pi_k)\lambda$ (siehe Seite 307) ergibt sich hieraus $E(L) = E(L_s) + \frac{(1-\pi_k)\lambda}{\mu}$ und mit $q = \frac{\lambda}{\mu}$ ist die mittlere Anzahl von Nachrichten im System sodann gegeben durch

$$\boxed{E(L) = E(L_s) + (1-\pi_k)q}$$

Das π_k ermitteln wir aus $\pi_i = \frac{q^i}{s^{i-s}s!}\pi_0 \quad ; s \le i \le k \quad \rightarrow \quad \boxed{\pi_k = \frac{q^k}{s^{k-s}s!}\pi_0}$

Und setzen $E(L_s)$ entweder für p≠1 oder p=1 einzusetzen.

3.4.5.3 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht $E(T_s)$ in der Warteschlange

Es sei T_s die Zufallsvariable, die die Aufenthaltszeit einer Nachricht in der Warteschlange bis zu ihrer Bearbeitung annimmt. Wir erhalten $E(T_s)$ durch Umstellung der Formel von Little: $E(L_s) = \lambda_{eff} \cdot E(T_s) \quad \rightarrow \quad E(T_s) = \frac{E(L_s)}{\lambda_{eff}}$ (vgl. Seite 287). Mit dem Einsatz von $\lambda_{eff} = (1-\pi_k)\lambda$ ist die mittlere Aufenthaltszeit in der Warteschlange gegeben durch

$$\boxed{E(T_s) = \frac{E(L_s)}{(1-\pi_k)\lambda}}$$

Dabei ist $E(L_s)$ entweder für p≠1 oder p=1 einzusetzen.

3.4.5.4 Die mittlere Aufenthaltszeit einer Nachricht E(T) im System

Es sei T die Zufallsvariable, die die Aufenthaltszeit einer Nachricht im System annimmt. Wir berechnen $E(T)$ entweder mit der Gleichung $E(T) = E(T_s) + \frac{1}{\mu}$ (siehe Seite 286) oder mit der Formel von Little: $E(L) = \lambda_{eff} E(T) \quad \rightarrow \quad E(T) = \frac{E(L)}{\lambda_{eff}}$ (vgl. Seite 288). Mit dem Einsatz von $\lambda_{eff} = (1-\pi_k)\lambda$ ist die mittlere Aufenthaltszeit in der Warteschlange gegeben durch

$$\boxed{E(T) = E(T_s) + \frac{1}{\mu} = \frac{E(L)}{(1-\pi_k)\lambda}}$$

Beispiel:

In einer Anlage mit 3 Druckern bearbeitet jeder Drucker im Mittel 2 Aufträge pro Minute. Dabei treffen im Mittel 8 Aufträge pro Minute ein. Sind alle Drucker beschäftigt, werden nachkommende Aufträge in die Warteschlange eingereiht. Die Warteschlange ist auf 4 Plätze begrenzt. Es gilt: s = 3, s−1 = 2, $\lambda = 8/\min$, $\mu = 2/\min$, $q = \frac{\lambda}{\mu} = 4$, $p = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{8}{3 \cdot 2} = 1{,}3333$ (man beachte: p > 1 ist erlaubt) und k = 7 (3 Aufträge in Bearbeitung plus 4 Warteplätze).

1, Wie viele Aufträge befinden sich im Mittel in der Warteschlange?

Wir berechnen als erstes

$$\pi_0 = \left[\frac{q^s}{s!}\left(\frac{1-p^{k-s+1}}{1-p}\right) + \sum_{i=0}^{s-1}\frac{q^i}{i!}\right]^{-1} = \left[\frac{4^3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1-1{,}3333^{7-3+1}}{1-1{,}3333}\right) + \frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!}\right]^{-1}$$

$$= \left[10{,}6667\left(\frac{1-4{,}2135}{-0{,}3333}\right) + 1 + 4 + 8\right]^{-1} = (10{,}6667 \cdot 9{,}6415 + 13)^{-1} = 115{,}843^{-1} \quad \rightarrow$$

$\pi_0 =$ <u>**0,0086**</u>

Die Wahrscheinlichkeit, dass das System in den stationären Ruhezustand gelangt, ist verschwindend gering. Hiermit erhalten wir

$$E(L_S) = \pi_0 \frac{q^s p}{s!} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}\left(1 - p^{k-s+1} - (1-p)(k-s+1)p^{k-s}\right)$$

$$= 0{,}0086 \cdot \frac{4^3 \cdot 1{,}3333}{3!} \frac{1}{(1-1{,}3333)^2}\left(1 - 1{,}3333^{7-3+1} - (1-1{,}3333)(7-3+1)1{,}3333^{7-3}\right)$$

$$= 0{,}1223 \cdot 9{,}0018(-3{,}2135 - (-0{,}3333) \cdot 15{,}8009) = 1{,}1009(-3{,}2135 + 5{,}2664)$$

$E(L_S) = 1{,}1009 \cdot 2{,}0529$ = <u>**2,0525**</u>

Im Mittel befinden sich 2 Aufträge in der Warteschlange.

2, Wie viele Aufträge befinden sich im Mittel im System?

Die Berechnung erfolgt mit $E(L) = E(L_S) + (1 - \pi_k)q$. Als erstes bestimmen wir

$\pi_k = \frac{q^k}{s^{k-s}s!}\pi_0 = \frac{4^7}{3^{7-3} \cdot 3!} \cdot 0{,}0086 = \frac{16384}{81 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}0086$ = <u>**0,2899**</u>. Hiermit erhalten wir

$E(L) = 2{,}0525 + (1 - 0{,}2899)4 = 2{,}0525 + 0{,}7101 \cdot 4$ = <u>**4,8929**</u>

Im Mittel befinden sich 5 Aufträge im System.

3, Wie groß ist die mittlere Wartezeit in der Warteschlange?

Es gilt $E(T_S) = \frac{E(L_S)}{(1-\pi_k)\lambda}$ mit $E(L_S)$ für p ≠ 1. $E(T_S) = \frac{2{,}0525}{(1-0{,}2899)\cdot 8} = \frac{2{,}0525}{5{,}6806}$

$E(T_S)$ = **<u>0,3613</u>** Minuten = 21,6783 Sekunden.

Im Mittel hält sich 1 Auftrag 22 Sekunden in der Warteschlange auf.

4, Wie groß ist die mittlere Aufenthaltszeit im System?

Es gilt $E(T) = E(T_S) + \frac{1}{\mu} = 0{,}3613 + \frac{1}{2}$ = **<u>0,8613</u>** Minuten = **<u>51,678</u>** Sekunden oder alternativ

$E(T) = \frac{E(L)}{(1-\pi_k)\lambda} = \frac{4{,}8929}{(1-0{,}2899)\cdot 8} = \frac{4{,}8929}{5{,}6808} =$ **<u>0,8613</u>** Minuten = **<u>51,678</u>** Sekunden.

Die mittlere Aufenthaltszeit im System beträgt 52 Sekunden.

5, Wie viele Aufträge werden durchschnittlich pro Minute abgewiesen?

Es gilt $\lambda \cdot \pi_k = 8 \cdot 0{,}2899$ = **<u>2,3192</u>** Aufträge. Dies entspricht $60 \cdot \lambda \cdot \pi_k = 60 \cdot 2{,}3192$ = **<u>139,152</u>** Aufträge pro Stunde.

3.4.5.5 Die Verteilung der Zufallsvariablen T_S = Wartezeit in der Warteschlange

Die Herleitung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(T_S \leq t)$ ist etwas kompliziert. Wir orientieren uns an den Ausführungen von Donald Gross et al. und interessieren uns zunächst für die Systemzustände in den Bereichen $s \leq i \leq k-1$ und $s \leq i \leq k$. Betrachten wir dazu die folgenden Bilder:

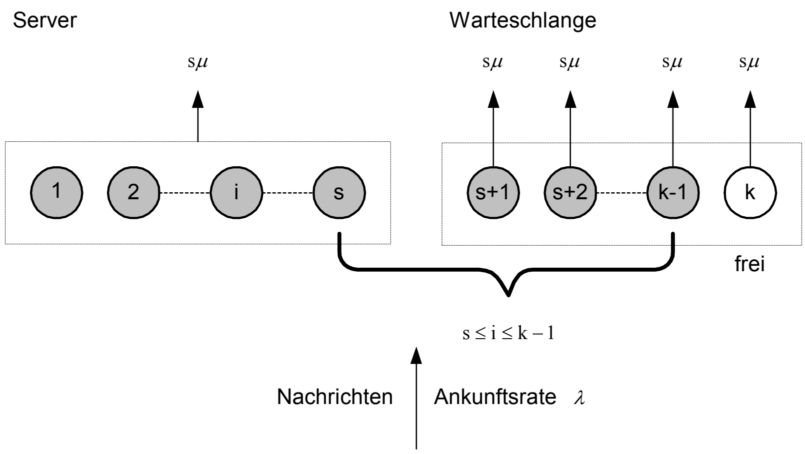


Bild 80a: Noch aufnahmefähige Warteschlange

In einem Poisson-Strom mit der Ankunftsrate λ kommen Nachrichten im System an und werden im Bereich $s \leq i \leq k$ mit der Service-Rate $s\mu$ bedient. Liegt i im Bereich $s \leq i \leq k-1$, dann ist die Aufnahmekapazität noch nicht ausgeschöpft. Es existiert noch mindestens ein freier Platz bei i = k (siehe Bild 80a). Mit anderen Worten, trifft eine Nachricht auf den Zustand i = k−1, dann kann sie noch in die Warteschlange aufgenommen werden.

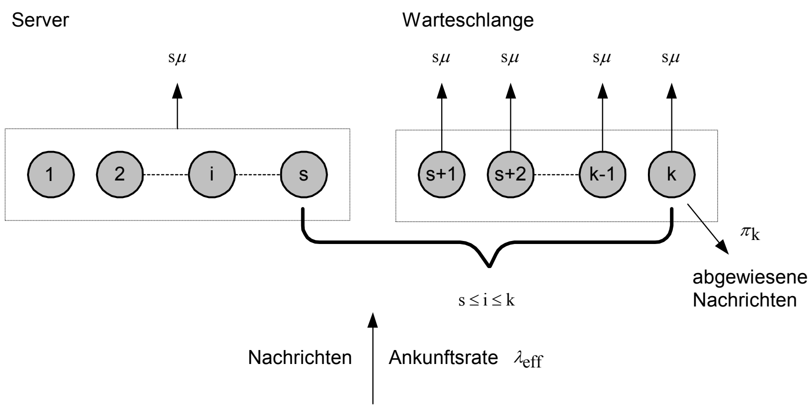


Bild 80b: Aufnahmekapazität ausgeschöpft

Ist die Warteschlange komplett aufgefüllt, dann ist der Systemzustand i = k erreicht. So werden weitere Nachrichten ab k mit der Wahrscheinlichkeit π_k abgewiesen. Die Folge davon ist, dass der Ankunftsstrom kein Poisson-Strom mehr ist. Die Ankunftsrate λ_i ist Null, wenn immer $i \geq k$ ist. Dies bedeutet, diejenigen Nachrichten, die das System tatsächlich betreten, tun dies mit der Ankunftsrate λ_{eff} (siehe Bild 80b). So liegt es auf der Hand, dass es Grenzwahrscheinlichkeiten gibt, die sich von π_i unterscheidet. Wir nennen sie π_i^*. Um sie zu bestimmen gehen wir folgendermaßen vor.

• Wir bezeichnen mit S_i das Ereignis „*das Multiserver-System befindet sich im Augenblick der Ankunft einer Nachricht im Zustand i* “. Dabei begrenzen wir den Wertevorrat von i auf $i = \{0,1,\ldots\ldots s, s+1,\ldots\ldots,k-1\}$. Kommt bei i = k−1 eine Nachricht hinzu, dann wird sie als letzte Nachricht in das System aufgenommen. Danach befindet sich das System im Zustand i = k, d.h. die Aufnahmekapazität ist ausgeschöpft. Bleibt die Anzahl der einlaufenden Nachrichten begrenzt, so dass sie nur Zustände im Bereich $0 \le i \le k-1$ vorfinden, dann wird natürlich keine Nachricht abgewiesen.
Unter dieser Voraussetzung treten im stationären Zustand die Ereignisse S_i mit der Grenzwahrscheinlichkeit $\pi_i = P(S_i)$ in Erscheinung.
• Wir bezeichnen als nächstes mit B das Ereignis „*eine Nachricht kommt in der Zeit* Δt *im System an*“.

Ist die Anzahl der Nachrichten im Ankunftsstrom unbegrenzt, werden bekanntermaßen die Nachrichten ab i = k abgetrennt. Unter dieser Voraussetzung treten im stationären Zustand die Ereignisse S_i mit der Grenzwahrscheinlichkeit $\pi_i^* = P(S_i / B)$ in Erscheinung. Dafür schreiben wir anschaulich:

$$\boxed{\pi_i^* \equiv P(\text{Zustand i} / \text{Ankunft in } \Delta t)} \quad ;(\equiv \text{ bedeutet identisch gleich})$$

Zur Bestimmung von π_i^* benutzen wir die Formel von Bayes. In unserem Kontext lautet sie:

$$\pi_i^* = P(S_i / B) = \frac{P(B/S_i) \cdot P(S_i)}{\sum\limits_{i=1}^{k} P(B/S_i) \cdot P(S_i)} = \frac{P(B/S_i) \cdot P(S_i)}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} P(B/S_i) \cdot P(S_i)} \quad \text{(vgl. Seite 133)}$$

Weil ab i = k der Poisson-Strom abgebrochen wird, ist die Bildung der totalen Wahrscheinlichkeit auf den Zustandsbereich $0 \le i \le k-1$ begrenzt. Dort gilt $\pi_i = P(S_i)$. Und so schreiben wir anschaulich

$$\pi_i^* = \frac{P(\text{Ankunft in } \Delta t / \text{Zustand i}) \cdot \pi_i}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} P(\text{Ankunft in } \Delta t / \text{Zustand i}) \cdot \pi_i}$$

Nach den Poisson-Kriterien trifft in der Zeit Δt höchstens 1 Nachricht im System ein. Die Wahrscheinlichkeit hierfür lautet $p = \lambda \Delta t$ (siehe Seite 277). Kommen in Δt mehr als 1 Nachricht an, dann ist die Wahrscheinlichkeit hierfür definiert durch

$$0(\Delta t) \text{ mit } \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} = 0}$$

Somit gilt $P(\text{Ankunft in } \Delta t / \text{Zustand i}) = \lambda \Delta t + 0(\Delta t)$ und π_i^* modifiziert sich demzufolge zu

$$\pi_i^* = \frac{(\lambda \Delta t + 0(\Delta t) \cdot \pi_i}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} (\lambda \Delta t + 0(\Delta t) \cdot \pi_i} = \frac{\left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \right) \cdot \pi_i}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \right) \cdot \pi_i}$$

Strebt $\Delta t \to 0$ ergibt sich

$$\pi_i^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}\right) \cdot \pi_i}{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\lambda \Delta t}{\Delta t} + \frac{0(\Delta t)}{\Delta t}\right) \cdot \pi_i} = \frac{\lambda \pi_i}{\sum_{i=0}^{k-1} \lambda \pi_i} = \frac{\pi_i}{\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i}$$

Mit $\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i = \sum_{i=0}^{k} \pi_i - \pi_k = \pi_0 + \pi_1 + \cdots\cdots + \pi_{k-1} + \pi_k - \pi_k = 1 - \pi_k$ folgt schließlich

$$\boxed{\pi_i^* = \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}}$$

Anmerkung: Bei $k \to \infty$ (wie beim M/M/s/∞-System) geht $\pi_k \to 0$ und es resultiert $\pi_i^* = \pi_i$.

Beim M/M/s/k-System mit seinem begrenzten Warteraum ist sodann die Wahrscheinlichkeit, mit der eine ankommende Nachricht (aus dem Kontingent von $i \geq k$ Nachrichten) in den Bereich $s \leq i \leq k-1$ der Warteschlange aufgenommen wird, gegeben durch

$$\boxed{\sum_{i=s}^{k-1} \pi_i^* = \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}}$$

Wir haben nun die Voraussetzungen geschaffen, um die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(T_S \leq t)$ herzuleiten. In Anlehnung an den Ansatz von Seite 323 schreiben wir

$$\boxed{P(T_S \leq t) = P(T_S = 0) + \sum_{i=s}^{k-1} P(i - s + 1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \leq t \,/\, \text{Zustand } i) \cdot \pi_i^*}$$

Zur Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(t) = \sum_{i=s}^{k-1} P(i - s + 1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in} \leq t \,/\, \text{Zustand } i)$$

nutzen wir die Erlang-Verteilung, die auch hier wegen n = i−s+1 vom Typ i−s+1 ist. Da i im Bereich $s \leq i \leq k-1$ liegt, liefert das M/M/s/k-System einen Poisson-Ausgangsstrom mit der Service-Rate $s\mu$. Mit den Integrationsgrenzen im Intervall [0,t] modifiziert sich die Erlang-Verteilung

$$F(x) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\mu x} dx$$

zu $F(t) = \dfrac{(s\mu)^{i-s+1}}{(i-s+1-1)!} \displaystyle\int_0^t x^{i-s+1-1} e^{-s\mu x} dx = \dfrac{s\mu (s\mu)^{i-s}}{(i-s)!} \displaystyle\int_0^t x^{i-s} e^{-s\mu x} dx \quad \to$

$$F(t) = 1 - \frac{s\mu(s\mu)^{i-s}}{(i-s)!} \int_t^{\infty} x^{i-s} e^{-s\mu x} dx$$

Die Substitution x = u+t führt für t = 0 zu x = u $\rightarrow$ dx = du. Zusammen mit dem Einsatz von m = i−s (augenblickliche Anzahl der wartenden Nachrichten) erhalten wir

$$F(t) = 1 - \frac{s\mu(s\mu)^m}{m!} \int_{t=0}^{\infty} (u+t)^m e^{-s\mu(u+t)} du = 1 - \frac{s\mu(s\mu)^m}{m!} \int_0^{\infty} (u+t)^m e^{-s\mu u} e^{-s\mu t} du$$

Wir werfen einen Blick auf den binomischen Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten.

Er lautet allgemein: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^i a^{n-i}$ mit $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Mit ihm finden wir für $(u+t)^m = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i u^{m-i}$. Eingesetzt in F(t) führt zu

$$F(t) = 1 - \frac{s\mu(s\mu)^m}{m!} \int_0^{\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} t^i u^{m-i} e^{-s\mu u} e^{-s\mu t} du$$

$$= 1 - \frac{s\mu(s\mu)^m}{m!} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} e^{-s\mu t} t^i \int_0^{\infty} u^{m-i} e^{-s\mu u} du$$

Zur Lösung des Integrals benutzen wir die **Gamma**-Funktion (siehe Seite 293)

$\Gamma(n) = \mu^n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\mu x} dx = (n-1)!$ Mit der Service-Rate $s\mu$ modifiziert sie sich zu

$\Gamma(n) = (s\mu)^n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-s\mu x} dx = (n-1)! \quad \rightarrow \quad \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-s\mu x} dx = \frac{(n-1)!}{(s\mu)^n}$. Hieraus folgt

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-s\mu x} dx = \frac{n!}{(s\mu)^{n+1}} \quad \text{und weiter}$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-i} e^{-s\mu x} dx = \frac{(n-i)!}{(s\mu)^{n-i+1}}$$

Die Nutzung des Ergebnisses liefert für $\int_0^{\infty} u^{m-i} e^{-s\mu u} du = \frac{(m-i)!}{(s\mu)^{m-i+1}}$. Eingesetzt in F(t) führt

zu $F(t) = 1 - \frac{s\mu(s\mu)^m}{m!} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} e^{-s\mu t} t^i \frac{(m-i)!}{(s\mu)^{m-i+1}} = 1 - s\mu(s\mu)^m \sum_{i=0}^{m} \frac{e^{-s\mu t} t^i (s\mu)^i}{i!(s\mu)^m (s\mu)} \quad \rightarrow$

$$F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}$$

Somit ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung

$F(t) = \sum_{i=s}^{k-1} P(i - s + 1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in } \le t \,/\, \text{Zustand } i)$ gegeben durch

$$\boxed{F(t) = 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}}$$

Die totale Wahrscheinlichkeit der in der Zeit $\le t$ abgeschlossenen Bearbeitungen hat für $s \le i \le k-1$ die Form $P(B) = \sum_{i=s}^{k-1} P(i - s + 1 \text{ abgeschlossene Bearbeitungen in } \le t \,/\, \text{Zustand } i)\, \pi_i^*$ (vgl. Seite 323). Zusammen mit $\sum_{i=s}^{k-1} \pi_i^* = \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}$ ist sie endgültig bestimmt durch

$$P(B) = \left(1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}\right) \sum_{i=s}^{k-1} \pi_i^* = \left(1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}\right) \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}$$

Berücksichtigen wir noch additiv die Wahrscheinlichkeit $P(T_S = 0)$ mit der eine neu ankommende Nachricht unverzüglich zu einem Server gelangt, dann erhalten wir die totale Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bearbeitungszeit:

$$P(T_S \le t) = P(T_S = 0) + \left(1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}\right) \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}$$

$$= P(T_S = 0) + \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} - \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}$$

Weil eines der Ereignisse „*eine Nachricht gelangt ohne Verzögerung zu einem der Server*“ **oder** „*eine Nachricht hält sich in der Warteschlange auf* „ mit Sicherheit auftritt, gilt

$\boxed{P(T_S = 0) + \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} = 1}$ $\rightarrow$ $P(T_S = 0) = 1 - \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k}$. Hiermit finden wir

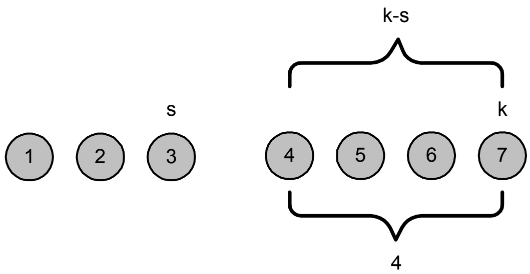
$$P(T_S \le t) = 1 - \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} + \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} - \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} \quad \rightarrow$$

$$P(T_S \le t) = 1 - \sum_{i=s}^{k-1} \frac{\pi_i}{1 - \pi_k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}$$

Übersichtlich zusammengefasst ist die Verteilungsfunktion der Wartezeit T_S in der Warteschlange des M/M/s/k-Systems gegeben durch

$$P(T_S \le t) = \begin{cases} 1-\sum\limits_{i=s}^{k-1} \dfrac{\pi_i}{1-\pi_k} \sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} & ;\text{für } t>0 \\ 1-\sum\limits_{i=s}^{k-1} \dfrac{\pi_i}{1-\pi_k} & ;\text{für } t=0 \end{cases}$$

Beim M/M/s/k-System durchläuft i den Wertevorrat i = {0,1,2,.........,k}, während wegen m = i−s das m den Wertevorrat m = {0,1,2,........, k−s} annehmen kann.
Dabei gibt $k-s$ die maximale Anzahl der Plätze in der Warteschlange an. Die folgende Skizze zeigt, ist z. B. k = 7 und s = 3, dann lautet die maximale Anzahl $k-s=7-3=4$.



• Ist i = s, dann ergibt sich m = i − s = s − s = 0.
Alle Server arbeiten, doch die Warteschlange ist leer. Hierfür lautet die Summation:

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} = \frac{(s\mu t)^0}{0!} e^{-s\mu t} = e^{-s\mu t}$$

• Ist i = s+1, ergibt sich m = i − s = s+1 − s = 1.
Alle Server arbeiten und in der Warteschlange befindet sich 1 Nachricht. Die Summation lautet:

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} = \left(\frac{(s\mu t)^0}{0!} + \frac{(s\mu t)^1}{1!} \right) e^{-s\mu t} = (1+s\mu t) e^{-s\mu t}$$

usw.

• Ist i = k, ergibt sich m = i − s = k − s.
Die Warteschlange ist komplett aufgefüllt. Hierfür lautet die Summation:

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} = \left(\frac{(s\mu t)^0}{0!} + \frac{(s\mu t)^1}{1!} + \frac{(s\mu t)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(s\mu t)^{k-s}}{(k-s)!} \right) e^{-s\mu t}$$
$$= \left(1 + s\mu t + \frac{(s\mu t)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{(s\mu t)^{k-s}}{(k-s)!} \right) e^{-s\mu t}$$

3.4.5.5.1 Die Wartezeitverteilung in der Warteschlange des M/M/1/k-Systems

Mit **s=1** reduziert sich $P(T_S \le t)$ auf die Gleichungen des **M/M/1/k**-Warteschlangensystems. Dort gilt $p = \lambda / \mu$. Sie hat die Struktur einer **Mailbox** und ist die wichtigste Datenstruktur zum Nachrichtenaustausch (message passing) in Multitasking-Systemen und verteilten Systemen (siehe dazu Abschnitt 3.4.3).

Mit $\pi_i = \frac{(1-p)p^i}{1-p^{k+1}}$ und $\pi_k = \frac{(1-p)p^k}{1-p^{k+1}}$ (siehe Seite 303) erhalten wir für

$$\sum_{i=1}^{k-1} \pi_i^* = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\pi_i}{1-\pi_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\frac{(1-p)p^i}{1-p^{k+1}}}{1-\frac{(1-p)p^k}{1-p^{k+1}}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\frac{(1-p)p^i}{1-p^{k+1}}}{\frac{1-p^{k+1}-p^k+p^{k+1}}{1-p^{k+1}}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(1-p)p^i}{1-p^k}$$

$$= \frac{(1-p)p}{1-p^k} \sum_{i=1}^{k-1} p^{i-1} = \frac{(1-p)p}{1-p^k} \cdot \frac{1-p^{k-1}}{1-p} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k-1} \pi_i^* = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\pi_i}{1-\pi_k} = \frac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k}}$$

Und so gestaltet sich wegen $P(T_S \le t) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\pi_i}{1-\pi_k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(s\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t}$ die totale

Wahrscheinlichkeitsverteilung der Bearbeitungszeit wie folgt

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} \quad ;\text{mit} \quad \boxed{m = \{0,1,2,......,k\text{-}1\}}$$

Als nächstes vereinfachen wir $P(T_S = 0)$ zu

$$P(T_S = 0) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\pi_i}{1-\pi_k} = 1 - \frac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k} = \frac{1-p^k-p+p^k}{1-p^k} \quad \rightarrow$$

$$P(T_S = 0) = \frac{1-p}{1-p^k}$$

Übersichtlich zusammengefasst ist die Verteilungsfunktion der Wartezeit T_S in der Warteschlange des **M/M/1/k**-Systems gegeben durch

$$P(T_S \le t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k} \sum\limits_{i=0}^{m} \dfrac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} & ;\text{für } t > 0 \\ \dfrac{1-p}{1-p^k} & ;\text{für } t = 0 \end{cases}$$

Beispiel:

Eine Anlage mit 1 Drucker bearbeitet im Mittel 10 Aufträge pro Minute. Dabei treffen im Mittel 8 Aufträge pro Minute ein. Ist der Drucker beschäftigt, werden nachkommende Aufträge in die Warteschlange eingereiht. Die Warteschlange ist auf 4 Plätze begrenzt. Es gilt: s = 1, $\lambda = 8/\min$, $\mu = 10/\min$, $p = \dfrac{\lambda}{\mu} = 0{,}8$ und k = 5 (1 Auftrag in Bearbeitung plus 4 Warteplätze).

1, Die Warteschlange sei leer und 1 Auftrag ist in Bearbeitung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bearbeitung dieses Auftrags in weniger als 12 Sekunden (≤ 1/5 Minuten) abgeschlossen ist? Dafür schreiben wir i−s+1 abgeschlossene Bearbeitungen ≤ 1/5 mit i−s+1 = 1-1+1 = 1.

Wir berechnen m = i−s = 1−1 = 0 und erhalten damit zunächst die Summe

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} = \frac{(\mu t)^0}{0!} e^{-\mu t} = e^{-\mu t} = e^{-\frac{10}{5}} = e^{-2} = 0{,}1353.$$ Sodann liefert

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} = 1 - \frac{0{,}8(1-0{,}8^{5-1})}{1-0{,}8^5} \cdot 0{,}1353 = 1 - \frac{0{,}8(1-0{,}4096)}{1-0{,}3277} \cdot 0{,}1353$$

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{0{,}5904}{0{,}6723} \cdot 0{,}1353 = \underline{\mathbf{0{,}8812} = 88\%}$$

Der Drucker schließt mit einer Wahrscheinlichkeit von 88% den Auftrag in weniger als 12 Sekunden ab.

2, Die Warteschlange ist aufgefüllt, d.h. 1 Auftrag ist in Bearbeitung und 4 Aufträge warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bearbeitung aller Aufträge in weniger als 12 Sekunden (≤ 1/5 Minuten) abgeschlossen sind? Dafür schreiben wir: i−s+1 abgeschlossene Bearbeitungen ≤ 1/5 mit i = k und k−s+1 = 5-1+1 = 5.

Wir berechnen m = k−s = 5−1 = 4 und erhalten damit zunächst die Summe

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-s\mu t} = \left(\frac{(\mu t)^0}{0!} + \frac{(\mu t)^1}{1!} + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \frac{(\mu t)^3}{3!} + \frac{(\mu t)^4}{4!} \right) e^{-\mu t}$$

$$= \left(1 + \frac{10}{5} + \frac{(\frac{10}{5})^2}{2} + \frac{(\frac{10}{5})^3}{2 \cdot 3} + \frac{(\frac{10}{5})^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right) e^{-\frac{10}{5}} = \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24}\right) \cdot 0{,}1353$$

$= (1 + 2 + 2 + 1{,}3333 + 0{,}6667) \cdot 0{,}1353 = 7 \cdot 0{,}1353 = 0{,}9471$. Sodann liefert

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{p(1-p^{k-1})}{1-p^k} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} = 1 - \frac{0{,}8(1-0{,}8^{5-1})}{1-0{,}8^5} \cdot 0{,}9471 = 1 - \frac{0{,}8(1-0{,}4096)}{1-0{,}3277} \cdot 0{,}9471$$

$$P(T_S \le t) = 1 - \frac{0{,}5904}{0{,}6723} \cdot 0{,}9471 = \underline{\mathbf{0{,}1683} = 17\%}$$

Der Drucker schließt mit einer Wahrscheinlichkeit von 17% alle Aufträge in weniger als 12 Sekunden ab.

3, Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auftrag ohne Wartezeit bearbeitet wird? In diesem Fall ist im Augenblick kein Auftrag in Bearbeitung.

Es gilt $P(T_S = 0) = \frac{1-p}{1-p^k} = \frac{1-0{,}8}{1-0{,}8^5} = \frac{0{,}2}{1-0{,}3277} = \frac{0{,}2}{0{,}6723} = \underline{\mathbf{0{,}2975} = 30\%}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auftrag unverzüglich bearbeitet wird, liegt bei 30%.

4, Wie viele Aufträge werden durchschnittlich pro Stunde (60 Minuten) abgewiesen? Es gilt

$$60 \cdot \lambda \pi_k = 60 \cdot \lambda \frac{(1-p)p^k}{1-p^{k+1}} = 60 \cdot 8 \cdot \frac{(1-0{,}8) \cdot 0{,}8^5}{1-0{,}8^6} = 60 \cdot 8 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3277}{0{,}7379} = 60 \cdot 8 \cdot \frac{0{,}0655}{0{,}7379} = \underline{\mathbf{42{,}6074}}$$

In 1 Stunde werden durchschnittlich 43 Aufträge zurückgewiesen.