Übungsblatt 1: Elementares Rechnen

Mengenlehre und Zahlenmengen

Aufgabe 1: Mengenoperationen

Es seien $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{f, g, h\}$ und $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an.

a) $M_1 \setminus M_2 = \{a, b, c, d, e\}$

b) $M_1 \cup M_3 = \{a, b, c, d, e, g, i\}$

c) $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$

d) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{a, b, ..., h, i\}$

Aufgabe 2: Beschreibende und aufzählende Form von Mengen

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Form an.

a) $M = \{k^2 | k \in \mathbb{Z} \text{ und } |k| < 4\} = \{0, 1, 4, 9\}$

b) $M = \{z | z \in \mathbb{Z} \text{ und } z \notin \mathbb{N}\} = \{0, -1, -2, -3, ...\}$

Geben Sie die folgenden Mengen in beschreibender Form an.

c) $M = \{2, 4, 6, 8, ...\} = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

d) $M = \{-5, -4, ..., 4, 5\} = \{z \,|\, z \in \mathbb{Z} \text{ und } |z| \leq 5\}$

e) $M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\} = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

f) M ist die Menge aller rationalen Zahlen, die größer als -2 und kleiner oder gleich 1 sind, $M = \{q \,|\, q \in \mathbb{Q}, -2 < q \text{ und } q \leq 1\}$

g) M ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die bei Division mit 3 den Rest 1 ergeben, $M = \{3n - 2 \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{3n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N}_0\}$

*h) M ist die Menge aller (positiven oder negativen) echten Brüche, $M = \{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, |m| < n\}$

Aufgabe 3: Zahlenmengen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, wahr

b) $\mathbb{N} \ni 0$, falsch

c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{R}$, falsch

d) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, falsch

e) $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wahr

f) $\mathbb{N}_0 \supsetneq \mathbb{N}$, wahr

Aufgabe 4: Rationale und irrationale Zahlen

Welche der folgenden Zahlen sind irrational?

-5 $\quad \sqrt{3} - 1$ $\quad 0{,}\overline{123}$ $\quad \sqrt{5}$ $\quad 1{,}010010001\ldots$ $\quad \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\quad -9{,}73$ $\quad \frac{\pi}{4}$ $\quad \sqrt{2}^4$

Irrational sind $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt{5}$, $\frac{\pi}{4}$ und 1,01001000100001...

Rechnen mit Teilmengen der reellen Zahlen

Aufgabe 5: Rechnen mit ganzen Zahlen

Berechnen Sie.

a) $(-10) - (-10) = 0$
b) $(-2) \cdot (-2 - 2) = 8$
c) $2 \cdot (-6) - 3 \cdot (-4) = 0$
d) $-4 - (3 - (2 - 1)) = -6$
e) $-1 + (-2) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -24$
f) $1 - 2 \cdot (3 - 4 \cdot (5 - 6))) = -13$

Aufgabe 6: Rechnen mit Dezimalzahlen

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a) $0{,}1 \cdot 7{,}0 - 5{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}59$
b) $0{,}107 \cdot 10^2 - 1{,}7 \cdot 10^{-1} = 10{,}53$
c) $-9{,}9 + 0{,}1 - 0{,}09 + 0{,}001 = -9{,}889$
d) $1 - 1{,}1 + 1{,}11 - 1{,}111 + 1{,}1111 = 1{,}0101$
e) $230 \cdot 10^{-3} - 0{,}00230 \cdot 10^3 = -2{,}07$
f) $0{,}3 : 0{,}01 + 0{,}01 : 0{,}2 = 30{,}05$

Aufgabe 7: Reelle Zahlen vergleichen

Vergleichen Sie. Tragen Sie dazu jeweils eines der Vergleichszeichen $<$, $>$ oder $=$ ein.

a) $\frac{4}{13} \quad > \quad \frac{4}{15}$
b) $-10 \quad < \quad -2$
c) $\frac{3}{8} \quad > \quad \frac{2}{7}$
d) $-3{,}14 \quad > \quad -\pi$
e) $-1{,}1 \quad < \quad -\frac{12}{11}$
f) $\sqrt{10} \quad > \quad 3$
g) $\frac{9}{17} \quad > \quad \frac{11}{23}$
h) $-10^{-7} \quad > \quad -10^{-2}$

Aufgabe 8: Beträge

Berechnen Sie.

a) $|10 - 5 \cdot (-2)| - |-10 + 5 \cdot (-3)| = -5$
b) $5 - \Big|4 - |2 - 7|\Big| = 4$
c) $2 - 3 \cdot (|2 - 7| + |3 - 7|) = -25$
d) $|\sqrt{2} - 1| - |1 - \sqrt{2}| = 0$

Elementare Termumformungen

Aufgabe 9: Klammern auflösen

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie wenn möglich zusammen.

a) $-[(b-c)-a] = a-b+c$

b) $-[z+(5-(x-5))] = x-z-10$

c) $-[-(3+x-3\cdot(-x))-2] = 4x+5$

d) $(2a-b)(2b-3a) = -6a^2+7ab-2b^2$

e) $-xy^2(-x+y)+x^2y(x-y) = x^3y-xy^3$

f) $(u-2v+w)(2u+v-w) = 2u^2-2v^2-w^2-3uv+uw+3vw$

g) $(3x+2y)(4x-3y)(5x-7y) = 60x^3-89x^2y-23xy^2+42y^3$

Aufgabe 10: Ausmultiplizieren mit binomischen Formeln

Multiplizieren Sie die Terme mit Hilfe der binomischen Formeln aus.

a) $(-3a+4b)^2 = 9a^2-24ab+16b^2$

b) $(5x+3)(5x-3) = 25x^2-9$

c) $(-\frac{1}{2}-2x)^2 = 4x^2+2x+\frac{1}{4}$

d) $(\sqrt{8}+\sqrt{2}z)^2 = 2z^2+8z+8$

e) $(2\sqrt{a}-\sqrt{3}b)(2\sqrt{a}+\sqrt{3}b) = 4a-3b^2$

f) $(3x+2)^2(3x-2)^2 = 81x^4-72x^2+16$

Aufgabe 11: Faktorisieren mit binomischen Formeln

Verwandeln Sie die Terme mit Hilfe der binomischen Formeln in Produkte.

a) $9a^2-24a+16 = (3a-4)^2$

b) $\frac{b^2}{4}-1 = (\frac{b}{2}-1)(\frac{b}{2}+1)$

c) $49x^2+14xy+y^2 = (7x+y)^2$

d) $18x^2-2y^2 = 2(3x+y)(3x-y)$

e) $\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{4}{9} = (\frac{a}{2}+\frac{2}{3})^2$

f) $0{,}01a^2-a+25 = (0{,}1a-5)^2$

Aufgabe 12: Kopfrechnen mit binomischen Formeln

Berechnen Sie ohne Taschenrechner mit Hilfe der binomischen Formeln

a) $9{,}9^2 = 98{,}01$

b) $53^2 = 2809$

c) $99\cdot 101 = 9999$

d) $20{,}5^2 = 420{,}25$

e) $10{,}8\cdot 11{,}2 = 120{,}96$

f) $6{,}8^2 = 46{,}24$

Aufgabe 13: Faktorisieren von Summen

Stellen Sie die folgenden Terme als Produkte dar. Faktorisieren Sie dabei soweit wie möglich.

a) $a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$

b) $9b^2 - 30b + 25 = (3b-5)^2$

c) $12a^2 - 36a + 27 = 3 \cdot (2a-3)^2$

d) $25y^2 - 9z^2 = (5y-3z)(5y+3z)$

e) $a^2 + 14a + 49 = (a+7)^2$

f) $a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b)$

g) $x^2 + z(x-2) - 4 = (x-2)(x+z+2)$

h) $(x+1)(x+2) + (x+1)^2 - 2(x^2-1) = 5(x+1)$

i) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a-1)^3$

* j) $x^2 - xy - 6y^2 = (x+2y)(x-3y)$

*k) $(x^2 + x + 1) - (y^2 + y + 1) = (x-y)(x+y+1)$

** l) $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4 = (x+2y)^4$

Brüche

Aufgabe 14: Brüche und Dezimalzahlen

a) Stellen Sie die folgenden Brüche jeweils als Dezimalzahl dar.

$$\tfrac{219}{600} = 0{,}365 \qquad \tfrac{13}{70} = 0{,}1\overline{857142}$$

b) Stellen Sie die folgenden Dezimalzahlen jeweils als (gekürzten) Bruch dar.

$$4{,}55 = \tfrac{91}{20} \qquad 2{,}3474747... = 2{,}3\overline{47} = \tfrac{1162}{495} = \tfrac{2\cdot 7\cdot 83}{3^2\cdot 5\cdot 11}$$

Aufgabe 15: Mit Brüchen rechnen

Berechnen Sie.

a) $\frac{2}{75} + \frac{1}{45} = \frac{11}{225}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$

c) $\frac{5}{12} : \frac{15}{16} = \frac{4}{9}$

d) $\frac{8}{3} : 4 = \frac{2}{3}$

e) $\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7} = 1$

f) $\frac{20}{21} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{15} = 2$

g) $\frac{1}{9} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{8}$

h) $\frac{1}{126} + \frac{1}{168} = \frac{1}{72}$

i) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{25}{16}$

Aufgabe 16: Bruchterme vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.
Geben Sie ggf. an, für welche Werte der Variablen die Terme nicht definiert sind.

a) $\frac{(a-b)^2}{(a^2-b^2)^2} = \frac{1}{(a+b)^2},\ a \neq \pm b$

b) $\frac{8a+25}{a+4} + \frac{(2a-6)(a+3)}{2a+8} = a+4,\ a \neq -4$

c) $\frac{3mp^2}{5n} \cdot \frac{30}{m^2} : \frac{9p}{n^2} - \frac{pn}{m} = \frac{pn}{m},\ m,n,p \neq 0$

d) $\frac{((x^2+2x+1)(x-1)^2)^3}{(x^2-1)^6} = 1,\ x \neq \pm 1$

e) $\frac{\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}}{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{a+b}{(a+1)(b+1)},\ a \neq \pm b,\ a,b \neq -1$

* f) $\frac{x^2+6x+5}{x^3+3x^2+3x+1} = \frac{x+5}{(x+1)^2},\ x \neq -1$

g) $\frac{2}{x+1} + \frac{2x+1}{2x^2+4x+2} - \frac{3x-2}{x^2-1} = -\frac{3x+1}{2(x+1)^2(x-1)},\ x \neq \pm 1$

h) $\left(\frac{27a^2-12}{3a^2-75} \cdot \frac{a+5}{8-12a}\right) : \frac{2+3a}{20-4a} = 1,\ a \notin \left\{-5, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 5\right\}$

Aufgabe 17: Brüche anwenden

a) Für den Gesamtwiderstand R einer Schaltung gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_2}$$

Stellen Sie R als gewöhnlichen Bruch mit nur einem Bruchstrich dar. $R = \frac{R_1(R_1+R_2)}{R_1+2R_2}$

b) Der Wert einer physikalischen Größe wird in einem Zwischenschritt wie folgt angegeben:

$$1{,}4 \cdot 10^{17}\ \frac{\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{kg}^2}{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{s^2}}$$

Was kann man sich unter dieser Größe vorstellen? Eine Fläche.

Potenzen und Wurzeln

Aufgabe 18: Potenzgesetze anwenden

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $5^2 \cdot x^{-1} \cdot y^3 \cdot 5^{-3} \cdot x^2 \cdot y^{-2} = \frac{xy}{5}$

b) $\frac{5c^9 \cdot (9c^4)^{\frac{1}{2}}}{(2c^2)^3} \cdot c = \frac{15}{8}c^6$

c) $\frac{a^3b^2}{3} \cdot \frac{a^n b^m}{a^{3+n}b^{m+2}} = \frac{1}{3}$

d) $\left(\frac{\sqrt{x^2y^{-1}}}{\sqrt[3]{x^3y^2}}\right)^6 = \frac{1}{y^7}$

e) $(a+b)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(a+b)^4} = (a+b)^2$

Aufgabe 19: Potenzen und Wurzeln berechnen

Berechnen Sie ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{\frac{18}{98}} = \frac{3}{7}$

b) $(\frac{1}{10})^{-3} = 1000$

c) $\sqrt{9^3} = 27$

d) $\sqrt[4]{12^8} = 144$

e) $4^{-10} \cdot 16^2 \cdot 2^{-5} \cdot 32^3 = \frac{1}{4}$

f) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$

g) $((-2)^{-2})^{-2} = 16$

h) $2^{((-\frac{1}{2})^{-3})} = \frac{1}{256}$

Aufgabe 20: Terme mit Wurzeln vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich.
Lösen Sie die Aufgaben, ohne die Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten darzustellen.

a) $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

b) $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{a}\sqrt{b} \cdot \sqrt{a^2b^2} = (ab)^2$

c) $\sqrt[14]{\sqrt{x^{11}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[7]{x^3}} = \sqrt{x}$

d) $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -3 - 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{4 + x^4 + 4x^2} = x^2 + 2$

f) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \sqrt[8]{x^7}$

g) $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{2}}{\sqrt{50}-\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$

h) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = |x + 2|$

***Aufgabe 21:** Terme mit Wurzeln umformen

Zeigen Sie durch Rechnung, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

Lösung im Kurs

Logarithmen

Aufgabe 22: Logarithmen berechnen

Berechnen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners.

a) $\log_3 81 = 4$

b) $\lg 100000 = 5$

c) $\log_2 \left(\frac{1}{16}\right) = -4$

d) $\ln \sqrt{e^3} = \frac{3}{2}$

e) $\log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$

f) $\log_{\frac{1}{10}} 100 = -2$

g) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$

h) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

i) $\log_5 0{,}04 = -2$

Aufgabe 23: Mit Logarithmen rechnnen

Berechnen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners.

a) $10^{(2\lg 7)} = 49$

b) $\log_9\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{2}$

c) $4^{(2\log_2 5)} = 625$

d) $\log_{a^2}\left(\frac{1}{a^\pi}\right) = -\frac{\pi}{2}$

e) $\sqrt{8}^{(\log_2 9)} = 27$

f) $\log_{\sqrt[3]{3}} \sqrt{27} = \frac{9}{2}$

Aufgabe 24: Logarithmengesetze

a) Stellen Sie als Summe oder Differenz dar.

$\lg\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{10z^5}\right) = 2\lg x + \frac{1}{2}\lg y - 1 - 5\lg z,$

$\ln \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt[3]{27b}} = \frac{1}{2}\ln(2a) - \ln 3 - \frac{1}{3}\ln b,$

$\ln \sqrt{a^3 \frac{b^2}{\sqrt[4]{8z^3}}} = \frac{3}{2}\ln a + \ln b - \frac{1}{8}\ln 8 - \frac{3}{8}\ln z$

b) Fassen Sie zu einer Logarithmusfunktion zusammen.

$a \cdot \ln(a \cdot b) - \frac{1}{2}\ln x = \ln\left(\frac{(ab)^a}{\sqrt{x}}\right),$

$\frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}\ln(x^3) + 2\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^4) = \ln x$

***Aufgabe 25:** Logarithmen näherungsweise berechnen

Für den dekadischen Logarithmus $\lg x = \log_{10} x$ sind zwei Werte näherungsweise bekannt.
Ergänzen Sie exakt oder näherungsweise die übrigen Werte in der Tabelle.
Verwenden Sie keinen Taschenrechner und nur die Logarithmengesetze.

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg x$	−0,3	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,96	1

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $2^{10} = 1024 \approx 10^3 = 1000$.

***Aufgabe 26:** Logarithmen anwenden

Der absolute Schalldruckpegel L_p bei einem Schalldruck p ist wie folgt definiert:

$$L_p = 20\lg\frac{p}{p_0}$$

Er wird in der Hilfseinheit dB angegeben. Der Referenzwert $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$ entspricht dabei etwa der Hörschwelle des Menschen bei einer Frequenz von $1\,\text{kHz}$.

Manchmal liest man, dass eine Erhöhung des absoluten Schalldruckpegels um $6\,\text{dB}$ einer Verdopplung des Schalldruckpegels entspreche.
Ist diese Faustformel gerechtfertigt?

Lösung im Kurs

Vermischte Aufgaben

Aufgabe 27: Terme vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme soweit wie möglich.

a) $2\ln(x+1) - \ln(x^2-1) = \ln\frac{x+1}{x-1}$

b) $-|x^3| + |-x|^3 + |-x^3| - |x|x^2 - x|x|^2 = -x^3$

c) $(\sqrt{x+y} - \sqrt{y-z})(\sqrt{x+y} + \sqrt{y-z}) = x+z$

*d) $\frac{(a-1)^3}{|a^2+a-2|}\sqrt{a^2+4a+4} = |a-1|(a-1)$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 \cdot \sqrt[6]{x^7} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}} + 2 + \sqrt[6]{x}$

f) $\frac{((x^2+2x+1)(x-1)^2)^3}{(x^2-1)^6} = 1$

***Aufgabe 28:** Terme vereinfachen

Es sei $a = 3^{3010} - (\frac{1}{3})^{3010}$ und $b = 3^{3010} + (\frac{1}{3})^{3010}$. Berechnen Sie $a^2 - b^2$.
$a^2 - b^2 = -4$

Übungsblatt 2: Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1: Aussagen und Folgerungen

Verbinden Sie die beiden Aussagen jeweils mit einem der Pfeilsymbole $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ oder $\Leftrightarrow$.

a) $x = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 0$

c) $0 = 0 \quad \Leftarrow \quad 0 = 1$

d) $x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 3$

e) $0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2$

f) $(x+1)x = 0 \quad \Leftarrow \quad x = -1$ und $x = 0$

g) $x \geq 0$ und $x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

h) $x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ oder $x = -1$

Aufgabe 2: Lineare Gleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $2(x+2) = 5 - 4(x+1)$, $\mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}\}$

b) $1 - 2(x+2) = (4+x) - 3(x+2)$, $\mathbb{L} = \emptyset$

c) $-7(x+1) + 11 = 3(1-2x) - (x-1)$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{5}x - \frac{5}{3}$, $\mathbb{L} = \{100\}$

Aufgabe 3: Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge durch Anwendung einer Lösungsformel.

a) $5x^2 - 4x - 12 = 0$, $\mathbb{L} = \left\{2, -\frac{6}{5}\right\}$

b) $x^2 + 3x + 1 = 0$, $\mathbb{L} = \left\{\frac{-\sqrt{5}-3}{2}, \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right\}$

c) $5x^2 + 3x + 1 = 0$, $\mathbb{L} = \emptyset$

d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{15}{16} = 0$, $\mathbb{L} = \left\{-\frac{5}{6}, \frac{3}{4}\right\}$

*e) $x^2 + (2\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$, $\mathbb{L} = \{-2-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$

Aufgabe 4: Quadratische Gleichungen lösen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge mit einer geeigneten Lösungsmethode.

a) $2x^2 = 6x$, $\mathbb{L} = \{0, 3\}$

b) $4x^2 + 3x - 1 = 0$, $\mathbb{L} = \left\{-1, \frac{1}{4}\right\}$

c) $x^2 + 14x = -13$, $\mathbb{L} = \{-1, -13\}$

d) $x^2 - 17 = 0$, $\mathbb{L} = \{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$

e) $x + 1 + 2x(x+1) = 0$, $\mathbb{L} = \{-1, -\frac{1}{2}\}$

f) $x^2 + x + 1 = 0$, $\mathbb{L} = \emptyset$

g) $x^2 + 6x + 9 = 0$, $\mathbb{L} = \{-3\}$

h) $x^2 - 2x = 1$, $\mathbb{L} = \{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

i) $(x+7)^2 = 4$, $\mathbb{L} = \{-9, -5\}$

j) $(x+3)(x+2) = 1$, $\mathbb{L} = \left\{\frac{-5-\sqrt{5}}{2}, \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\right\}$

*__Aufgabe 5:__ Quadratische Gleichungen anwenden

Ein Stein wird zur Zeit $t = 0$ aus der Höhe x_0 mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geworfen. Für seine Höhe $x(t)$ zur Zeit t gilt der Zusammenhang

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

Dabei ist g die Erdbeschleunigung.

a) Zu welchen Zeiten t_1 und t_2 befindet sich der Steine auf der Höhe $x_1 > x_0$?
$t_1 = \frac{1}{g}(v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2g(x_1 - x_0)}), t_2 = \frac{1}{g}(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2g(x_1 - x_0)})$

b) Wie groß muss v_0 mindestens sein, damit der Stein die Höhe x_1 erreicht?
$v_0 \geq \sqrt{2g(x_1 - x_0)}$

Geben Sie die Lösungen jeweils in Abhängigkeit der unbekannten oder konstanten Größen an.

Aufgabe 6: Polynomgleichungen höherer Ordnung

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $x(x^2 - 2)(x + 3)^2(x^2 + 1) = 0$, $\mathbb{L} = \{-3, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

b) $x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0,\ x_1 = 3$, $\mathbb{L} = \{-5{,}3{,}7\}$

c) $(x^2 - 2)^3 + x^2 - 4 = 0$, $\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

d) $x^5 + x^4 - 20x^3 = 0$, $\mathbb{L} = \{-5, 0, 4\}$

e) $3x^4 + 6x^2 + 10 = 0$, $\mathbb{L} = \emptyset$

f) $x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 15 = 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, $\mathbb{L} = \{-\sqrt{5}, -\sqrt[3]{3}, \sqrt{5}\}$

g) $4x^{12} - 12x^8 + 9x^4 - 2 = 0$, $\mathbb{L} = \left\{-\sqrt[4]{2}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}\right\}$

Aufgabe 7: Wurzelgleichungen

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Wurzelgleichungen definiert? Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $\sqrt{12x - 3} = 3$, $D = \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$, $\mathbb{L} = \{1\}$

b) $\sqrt{3x + 4} = x + 2$, , $D = \left[-\frac{4}{3}, \infty\right[$, $\mathbb{L} = \{-1, 0\}$

c) $\sqrt{x^2 + 3x + 5} = -x^2 + 6x - 9$, $D = \mathbb{R}$, $\mathbb{L} = \emptyset$

d) $\sqrt{5x + 4} = 2x + 1$, $D = \left[-\frac{4}{5}, \infty\right[$, $\mathbb{L} = \{1\}$

e) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 1$, $D = [1, \infty[$, $\mathbb{L} = \emptyset$

f) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$, $D = [1, \infty[$, $\mathbb{L} = \{4\}$

Aufgabe 8: Ungleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $2x - 5 > \frac{5}{2}x + 8$, $\mathbb{L} =]-\infty, -26[$

b) $|x - 5| \leq 2$, $\mathbb{L} = [3, 7]$

c) $\frac{4}{x} < 1$, $\mathbb{L} =]-\infty, 0[\cup]4, \infty[$

d) $|x - 2| \geq |x + 3|$, $\mathbb{L} =]-\infty, -\frac{1}{2}]$

e) $\frac{1}{x-1} < 1$, $\mathbb{L} =]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$

f) $(x + 1)(2x - 4) < 0$, $\mathbb{L} =]-1{,}2[$

g) $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1}$, $\mathbb{L} =]-1, 1[$

h) $\frac{1}{|x-1|} < 1$, $\mathbb{L} =]-\infty; 0[\cup]2; \infty[$

i) $\frac{5x+2}{3x} < \frac{2+4x}{5x} + 1$, $\mathbb{L} =]-\infty{,}0[\cup]2, \infty[$

j) $|3x - 1| + |x - 2| \leq 3$, $\mathbb{L} = [0, 1]$

k) $\frac{x^2-2}{x^2+1} < 1$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

* l) $\frac{1}{|x|-1} < 1$, $\mathbb{L} =]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, \infty[$

Aufgabe 9: Lineare Gleichungssysteme I

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge mit einem geeigneten Verfahren.

a) $\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & -1 \\ -4x & + & 5y & = & -3 \end{array}$, $\mathbb{L} = \{(2, 1)\}$

b) $\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 4y & = & 8 \end{array}$, $\mathbb{L} = \emptyset$

c) $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & 2y & = & 7 \\ 3x & + & 4y & = & 0 \end{array}$, $\mathbb{L} = \left\{\left(-2, \frac{3}{2}\right)\right\}$

d) $\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 3y & = & 3 \\ -8x & + & 6y & = & -6 \end{array}$, $\mathbb{L} = \left\{(t, \frac{4}{3}t - 1) | t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(\frac{3}{4}(1 + t), t\right) | t \in \mathbb{R}\right\}$

e) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & 4y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & = & -8 \end{array}$, $\mathbb{L} = \{(-1, 1, -2)\}$

Aufgabe 10: Lineare Gleichungssysteme II

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

a) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 7x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$, $\mathbb{L} = \{(1{,}3{,}2{,}1)\}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$, $\mathbb{L} = \emptyset$

c) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -3 \end{array}$, $\mathbb{L} = \{(4{,}2{,}0{,}1)\}$

d) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 22x_3 & + & 36x_4 & = & 14 \\ 6x_1 & + & 6x_2 & + & 19x_3 & + & 31x_4 & = & 12 \end{array}$, $\mathbb{L} = \{(2-2s-t{,}t{,}-s{,}s) \mid s{,}t \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 11: Lineare Gleichungssysteme anwenden I

a) Ein Hotel hat 135 Betten in 75 Ein- und Zweibettzimmern. Wie viele Einzel- und wie viele Zweibettzimmer hat das Hotel? $n_\mathrm{E} = 15$, $n_\mathrm{Z} = 60$

b) Ein Vater ist viermal so alt wie sein Sohn. In fünf Jahren wird er noch dreimal so alt sein. Wie alt sind Vater und Sohn? $a_\mathrm{V} = 40$, $a_\mathrm{S} = 10$

c) Verlängert man die längere Seite eines Rechtecks um 4 cm und die kürzere Seite um 2 cm, so wächst der Flächeninhalt um 64 cm^2. Verlängert man die längere Seite des Rechtecks um 8 cm und die kürzere um 3 cm, so wächst der Flächeninhalt um 124 cm^2.

Wie lang sind die Seiten des Rechtecks? $a = 12\,\mathrm{cm}$, $b = 8\,\mathrm{cm}$

d) Zwei Bronzelegierungen A und B mit unterschiedlichem Zinngehalt werden zusammengeschmolzen. Verwendet man vier Teile von Legierung A und drei Teile von Legierung B, so hat die Schmelze einen Zinngehalt von 13,4 %. Verwendet man hingegen drei Teile von Legierung A und vier Teile von Legierung B ergibt sich ein Zinngehalt von 14,6 %.

Bestimmen Sie den Zinngehalt der beiden Legierungen. $k_A = 9{,}8\,\%$, $k_B = 18{,}2\,\%$

***Aufgabe 12:** Gleichungssysteme anwenden II

a) Aus zwei Zweitaktgemischen aus Motoröl und Benzin sollen 2,6 Liter eines Gemischs mit einem Mischungsverhältnis von 1:25 (Öl zu Benzin) hergestellt werden. Die beiden zur Verfügung stehenden Gemische haben Mischungsverhältnisse von 1:16 beziehungsweise 1:50.

Bestimmen Sie die benötigten Mengen der vorhandenen Gemische. 1,25 l des 1:16-Gemischs und 1,35 l des 1:50-Gemischs

b) Gegeben ist ein Rechteck mit der Länge a und der Breite $b, a > b$. Wenn man die Länge um 1 cm verringert und die Breite um 6 cm erhöht, so erhöht sich sein Flächeninhalt um ein Fünftel. Wenn man dagegen die Länge um 1 cm erhöht und die Breite um 4 cm verringert, so verringert sich sein Flächeninhalt um zwei Fünfzehntel. Bestimmen Sie Länge und Breite des Rechtecks. $a = 25\,\mathrm{cm}, b = 24\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 13: Vermischte Aufgaben

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

*a) $\sqrt{4x^2+\sqrt{x^2}+1}=x+1$, $\mathbb{L}=\left\{0,\frac{1}{3}\right\}$

b) $\frac{2x-3}{3-12x}=\frac{8x-12}{4x-1}$, $\mathbb{L}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

c) $|x-1|-|x+1|=-2$, $\mathbb{L}=[1,\infty[$

*d) $|x+2|-|x^2-4|=0$, $\mathbb{L}=\{-2{,}1{,}3\}$

e) $\lg(4x)-\lg(x-1)=\lg 2+\lg x$, $\mathbb{L}=\{3\}$

* f) $3^x=6^{x+4}$, $\mathbb{L}=\left\{\frac{4\ln 6}{\ln 3-\ln 6}\right\}=\{-4\log_2 6\}$

*g) $\mathrm{e}^{x^2}-1-2\,\mathrm{e}^{-x^2}=0$, $\mathbb{L}=\{-\sqrt{\ln 2},\sqrt{\ln 2}\}$

Für welche Werte von x sind die folgenden Terme definiert?

*h) $\sqrt{\sqrt{2x^2+2x-4}+\sqrt{x^2-3}}$, $x\leq-1-\sqrt{2}$ oder $x\geq\sqrt{3}$

** i) $\ln\left(\frac{1-\sqrt{x^2-1}}{x^2+2x-1}\right)$, $x\in]-1-\sqrt{2},-\sqrt{2}[\cup[1,\sqrt{2}[$

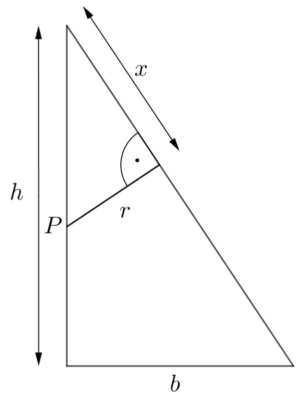
Übungsblatt 3: Geometrie

Aufgabe 1: Ähnliche Dreiecke

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit der Breite b und der Höhe h. Die Höhe h wird durch den Punkt P geteilt. Vom Punkt P wird ein Lot zur Hypotenuse gefällt. Die Länge dieser Lotstrecke sei r.

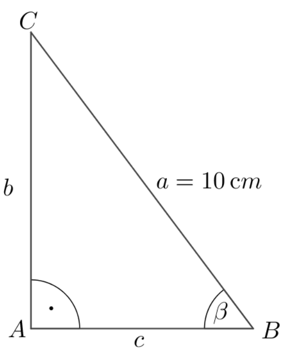
Bestimmen Sie den Hypotenusenabschnitt x in Abhängigkeit von h, b und r.

Lösung: $x = \frac{hr}{b}$



Aufgabe 2: Dreiecke

a) Im abgebildeten Dreieck sei $\cos\beta = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie die Längen von b und c.
$c = 6\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$

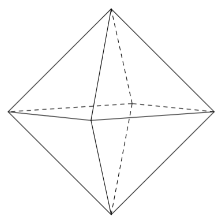


*b) In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Summe der Längen der Katheten 2 und die Hypotenuse sei doppelt so lang wie eine der beiden Katheten. Bestimmen Sie die Längen der Katheten und die Länge der Hypotenuse.
Lösung: $a = \sqrt{3} - 1$, $b = 3 - \sqrt{3}$, $c = 2a = 2(\sqrt{3} - 1)$

c) Ein regelmäßiges Oktaeder ist eine gleichseitige Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche. Berechnen Sie die Kantenlänge eines Oktaeders mit dem Volumen 2 Liter.

Hinweis: Volumina von Pyramiden berechnen sich allgemein nach der Formel
$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3}\,\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

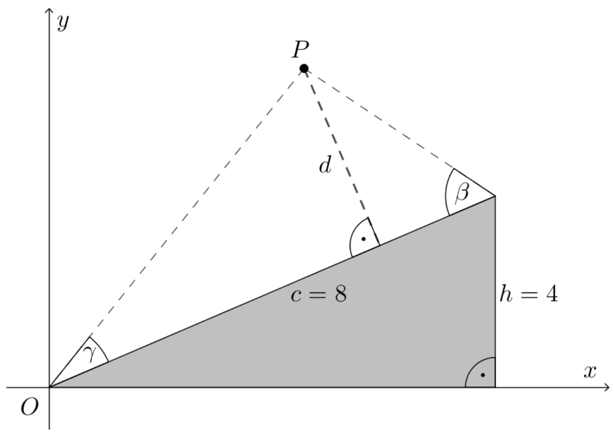
Lösung: $a = \sqrt[3]{\frac{3V}{\sqrt{2}}} \Rightarrow a = 1{,}62\,\text{dm}$



Aufgabe 3: Trigonometrie

a) Über dem grauen rechtwinkligen Dreieck in der Skizze wird ein Punkt P konstruiert. Gegeben sind die Winkel $\gamma = 30°$ und $\beta = 60°$ sowie die Hypotenuse des Dreiecks $c = 8$ und die Höhe $h = 4$. Welche Koordinaten hat der Punkt P und welchen Abstand d hat er vom Dreieck?

Lösung: $d = 2\sqrt{3}$



b) Berechnen Sie mit dem Additionstheorem für $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos - \cos \cdot \sin\beta$ und den bekannten trigonometrischen Funktionswerten für die Winkel 30° bzw. 45° den exakten Wert von $\sin 15°$.

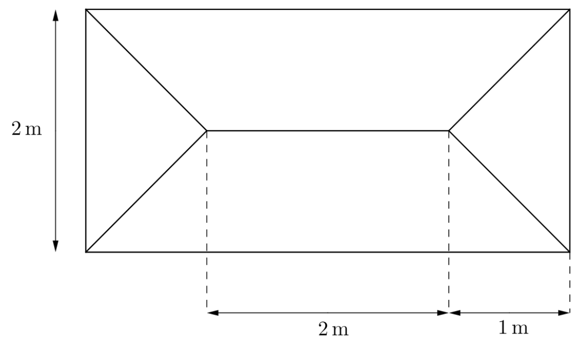
Lösung: $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

c) Das abgebildete Zelt (Ansicht von oben) ist entlang der Mittellinie 2 m hoch und am Rand am Boden aufliegend.

Bestimmen Sie die Länge x einer Eck-Zeltstange, die Fläche F der Zeltplane inklusive Boden und den Rauminhalt V des Zeltes.

Hinweis: Volumina von Pyramiden berechnen sich allgemein nach der Formel
$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3}\,\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$

Lösung: $x = \sqrt{6}\,\text{m} = 2{,}45\,\text{m}$; $F = \left(8 + 8\sqrt{5}\right)\,\text{m}^2 = 25{,}89\,\text{m}^2$; $V = \frac{20}{3}\,\text{m}^3 = 6{,}67\,\text{m}^3$



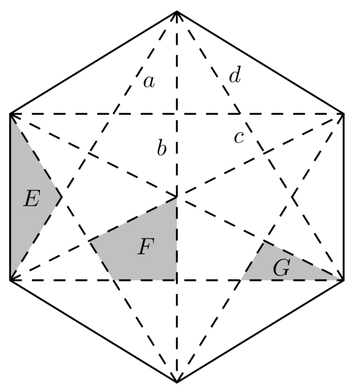
***Aufgabe 4:** regelmäßiges Sechseck

Dargestellt ist ein regelmäßiges Sechseck mit Kantenlänge 1, bei dem alle Ecken miteinander verbunden sind.

Bestimmen Sie die Längen der Strecken und die Flächen der Drei- und Vierecke, die beim Verbinden aller Ecken entstehen.

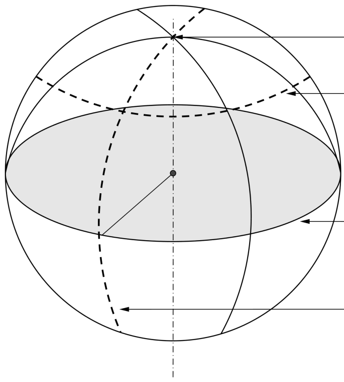
Hinweis: Ein regelmäßiges Sechseck kann man sich aus sechs gleichen gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt vorstellen.

Lösung: $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{6}\sqrt{3}$; $d = \frac{1}{3}\sqrt{3}$; $G = \frac{1}{24}\sqrt{3}$; $E = F = 2G$



Aufgabe 5: Anwendungsaufgabe Breitengrad

Zwei Orte A und B liegen beide auf 60° nördlicher Breite und haben genau 180° Längengrad-Differenz (also z. b. irgendwo in Kanada auf der einen und irgendwo in Russland auf der anderen Seite der Welt).



a) Welche Entfernung müsste man zurücklegen, wenn man sich von A nach B genau entlang des Breitengrades bewegen würde (einfache Navigation: immer nur Richtung West oder Ost)? (Rechnen Sie mit der Erde als Kugelgestalt mit einem Umfang von 40 000 km am Äquator.)

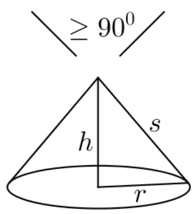
Lösung: 10 000 km

*b) Gibt es eine kürzere Verbindung und um wie viel wäre der minimale Weg kürzer als der entlang des Breitengrades?

Lösung: 6667 km; um $\frac{1}{3}$ kürzer

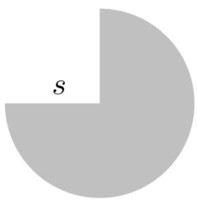
****Aufgabe 6:** Anwendungsaufgabe Wetterschutzabdeckung

Ein Spengler soll für ein historisches Gebäude aus Kupferblech Wetterschutzabdeckungen für diverse Entlüftungs- und Abzugsrohre anfertigen. Diese sollen kreiskegelförmige Gestalt („Spitzhut“) mit einem Spitzenwinkel nicht kleiner als 90° haben.

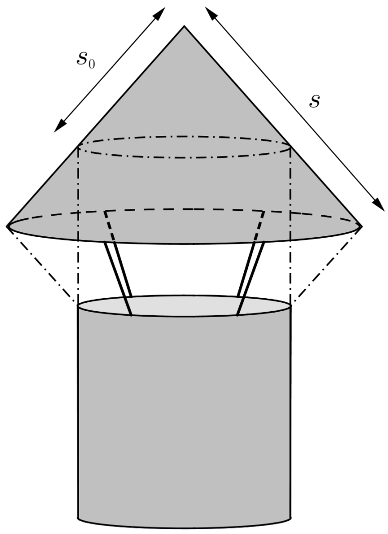


a) Genügt ein Kegel, der durch Aufrollen einer $\frac{3}{4}$ Ronde („Ronde“ = runder Blechabschnitt) entstehen würde, den Vorgaben?

Lösung: Der Kegel genügt den Vorgaben



b) Für die Befestigung der Hauben über den Rohren gibt es weitere Vorgaben: Aus ästhetischen Gründen bilden die Hauben einen gedachten Doppel-Kegel über den Rohrenden. Diese Anordnung gewährleistet zugleich Regenschutz bis zu einem Niederschlagswinkel von 45°. Andererseits besteht die Forderung, dass der freie Luftdurchlass unter der Haube nicht kleiner sein darf als der Querschnitt des zuführenden Rohres. Das bedeutet, dass die Mantelfläche des farbig markierten (gedachten) Kegelstumpfes mindestens so groß sein muss wie $\pi \cdot R^2$ (R ... Halbmesser des zuführenden Rohres). Damit lässt sich die Seitenlänge s des Kegelmantels eindeutig bestimmen!
Lösung: $s = \frac{1}{3}\sqrt{28} \cdot R$



Übungsblatt 4: Elementare Funktionen

Elementare Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 1: elementare Eigenschaften verschiedener Funktionstypen

Skizzieren sie auswendig die Graphen von $x^3, x^4, \sqrt{x}, \mathrm{e}^x, \ln x, \sin x, \cos x, \tan x$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Eigenschaften jeweils zutreffen:

- auf ganz $\mathbb{R}$ definiert
- monoton wachsend
- achsensymmetrisch
- punktsymmetrisch
- periodisch

Lösungen im Kurs

Aufgabe 2: Elementare Eigenschaften verschiedener Funktionstypen

Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Geben Sie für diese Aussagen jeweils ein Gegenbeispiel an.

a) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle. richtig

b) Eine Polynomfunktion geraden Grades hat keine Nullstellen. falsch: betrachte $y = x^2$

c) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen. richtig

d) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Definitionsmenge. falsch: undefiniert bei $x = 0$

e) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Bildmenge. falsch: 0 nicht in Bildmenge

f) Alle Funktionen $f(x) = a^x (a > 0)$ sind streng monoton wachsend. falsch: $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{2^x}$ ist streng monoton fallend (auf $\mathbb{R}^+$)

g) Der Graph der Funktion $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N})$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse. falsch: betrachte etwa $f(x) = x^3$

h) Die (maximale) Definitionsmenge der Funktion $f(x) = \sqrt{x+5}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 5 sind. falsch: $D_f = x \mid x \geq -5$

i) Die Maximalstellen der Funktion $f(x) = \sin x$ sind Wendestellen der Funktion $g(x) = \cos x$. richtig

Aufgabe 3: Symmetrieverhalten

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie:

a) $f(x) = x^3 + 1$, keine Symmetrie

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$, gerade

c) $f(x) = 0$, sowohl gerade als auch ungerade

d) $f(x) = \sin x + \cos x$, keine Symmetrie

e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$, ungerade

f) $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$, gerade

g) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, ungerade

Aufgabe 4: Elementare Eigenschaften verschiedener Funktionstypen

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Monotonie und Beschränktheit und bestimmen Sie (soweit möglich), Minimum und Maximum der Bildmenge.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \tan x$

e) $f(x) = \mathrm{e}^x$

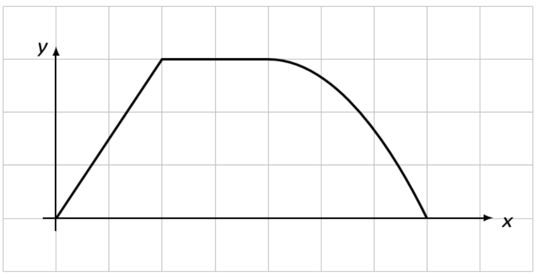
Lösungen im Kurs

Aufgabe 5: Funktion aus Graph rekonstruieren

Geben Sie eine Funktion an, die zum nachstehenden Graphen passt. (Das Raster hat Längeneinheit 1)

Hinweis: Die Funktion ist auf dem dritten Teilstück quadratisch.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{3}(x-4)^2 + 3 & \text{für} x \geq 4 \end{cases}$$



Umkehrfunktionen

Aufgabe 6: Funktionsgleichung nach der Variablen auflösen

Lösen Sie die Funktionsgleichung $y = \frac{x+1}{x-1}$ nach x auf. Was fällt Ihnen auf?

Lösung: $x = \frac{y+1}{y-1}$; also „selbstinverse“ Funktion

Aufgabe 7: Funktionsgleichung nach der Variablen auflösen

Gegeben ist die Formel (Funktion) $y = \sqrt{\frac{3x+2}{x} - 1}$.

a) Welche Werte $x \in \mathbb{R}$ darf man einsetzen (maximaler Definitionsbereich)?
$D_f = \mathbb{R} \setminus (-1{,}0]$

b) Lösen Sie die Formel nach x auf (Umkehrfunktion). $x = \frac{2}{y^2-2}$

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt die Formel den Wert $y = 2$? $x = 1$

*d) Wie lautet die Umkehrfunktion (mit Definitionsbereich)? Lösung im Kurs

Aufgabe 8: Umkehrfunktionen

Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen die Umkehrfunktion:

a) $f : [-1{,}1] \to [-5{,}1], f(x) = 3x - 2$; $f^{-1} : [-5{,}1] \to [-1{,}1], f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

b) $f : [0{,}\infty) \to [0{,}\infty), f(x) = x^4$; $f^{-1} : [0{,}\infty) \to [0{,}\infty), f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

c) $f : \mathbb{R} \to (0{,}\infty), f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{3x}$; $f^{-1} : (0{,}\infty) \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln(2x)$

d) $f : (0{,}\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \lg x^2$; $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0{,}\infty), f^{-1}(x) = \sqrt{10^x}$

e) $f : \mathbb{R} \to (1{,}\infty), f(x) = 3^{ax} + 1$ mit $a \neq 0$; $f^{-1} : (1{,}\infty) \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{\ln(x-1)}{a \cdot \ln 3}$

Aufgabe 9: Umkehrfunktionen

Geben Sie zu den nachfolgenden Funktionen Definitionsbereich und Bildmenge an und bilden Sie die Umkehrfunktion.

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = \frac{2x}{x-2}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

e) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

f) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

Lösungen im Kurs

***Aufgabe 10:** „Abschnittsweise“ Umkehrfunktionen

Zerlegen Sie $f(x) = x^2 + 6x + 8$ in umkehrbare Teilfunktionen (Wahl geeigneter Definitionsbereiche!) und geben Sie die Umkehrfunktionen an.

Lösung:

auf $(-\infty, -3]$: $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+1} - 3 \quad (x \geq -1)$

auf $[-3,\infty)$: $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 3 \quad (x \geq -1)$

Potenz- und Polynomfunktionen

Aufgabe 11: Lineare Funktionen I

Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung.

a) Die Gerade verläuft durch die Punkte $A(12|12)$ und $B(-4|-8)$. $y = \frac{5}{4}x - 3$

b) Die Gerade hat eine Nullstelle bei $x = -2$ und steht senkrecht auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{2}{3}x + 5$. $y = -\frac{3}{2}x - 3$

c) Die Gerade verläuft in einem Abstand von $d = \frac{3}{2}$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$. $g_1 : y = \frac{4}{3}x + 3$, $g_2 : y = \frac{4}{3}x - 2$

d) Die Gerade hat einen Steigungswinkel von 30° und verläuft durch den Punkt $P(2\sqrt{3}\,|\,1)$. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 1$

Aufgabe 12: Lineare Funktionen II

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $A(7|19)$ von der Geraden $y = \frac{5}{12}x + 2$.

Lösung:

Senkrechte Gerade durch A: $y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5}$, Schnittpunkt der beiden Geraden $S(12;7)$, Abstand $d = 13$

Aufgabe 13: Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^z, z \in \mathbb{Z}$. Für welche Werte von z ...

a) ... ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse? Skizzieren Sie einen typischen Verlauf und geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die Bildmenge an.

Graph symmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow$ z gerade

b) ... verläuft der Graph von f durch den Punkt $(2 \mid 16)$?

$z = 4$

c) ... verläuft der Graph von f durch den 1. und 3. Quadranten?

wenn z ungerade

d) ... lautet die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$?

wenn auch $f(x) = \frac{1}{x}$ (f „selbstinvers")

Aufgabe 14: Monotonie von Potenzfunktionen

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^a$ streng monoton wachsend, für welche streng monoton fallend?

Lösung: monoton wachsend für $a > 0$, monoton fallend für $a < 0$

Aufgabe 15: Verkettung von Potenzfunktionen

Es seien f und g von der Form $x \mapsto x^a, a \in \mathbb{R}$ („allgemeine“ Potenzfunktionen). Entscheiden Sie (mit Begründung), welche der folgenden Funktionen dann ebenfalls von dieser Form sind. (Wir betrachten als Definitionsbereich hier stets $\mathbb{R}^+$)

a) $f(x^2)$
b) $f(3x)$
c) $f(\sqrt[3]{x})$
d) $f(\frac{1}{x})$
e) die Umkehrfunktion f^{-1} von f
f) $f(x) \cdot g(x)$
g) $f(x) + g(x)$
h) $f(g(x))$

Lösung: alles wieder Potenzfunktionen bis auf b) und g); dies folgt einfach aus Potenzgesetzen; bei e) ist noch $a = 0$ auszuschließen

Aufgabe 16: Faktorisierung und Nullstellen von Polynomen

Welche der Aussagen sind in Bezug auf die folgende Gleichung richtig?

$$(x-2)(x-\sqrt{2})(x^2-9) = 0$$

Begründen Sie ihre Entscheidung.

a) Die Nullstellen sind hier schwierig zu bestimmen. falsch
b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen. falsch
c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen. richtig
d) $x = 1{,}4142$ und $x = 2$ sind Lösungen. falsch; 1,4142 ist ein gerundeter Wert und somit keine exakte Nullstelle
e) Es gibt genau vier Lösungen. richtig

Aufgabe 17: Aufgaben-Rekonstruktion aus der Lösung

Jan formuliert die Lösung einer Aufgabe in „Kurzschreibweise“:

$f(x) = 3x^2 - 12x - 5$
$g(x) = -6x - 8$
$f(x) = g(x)$:
$3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8$
$\Leftrightarrow$ ...
$\Leftrightarrow x = 1$

a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.
b) Welches geometrische Problem hatte Jan zu lösen?
c) Interpretieren Sie das von Jan errechnete Ergebnis geometrisch.

Lösungen im Kurs

Aufgabe 18: Nullstellen „ohne Mitternachtsformel“

Bestimmen Sie (ohne „Mitternachts“- bzw. „pq“-Formel) die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Lösung: $f(x) = (x+1)(x-4)$ (Satz von Vieta) $\Rightarrow$ Nullstellen -1 und 4

Aufgabe 19: Polynome mit gegebenen Nullstellen konstruieren

a) Gesucht ist die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades mit den drei Nullstellen $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2$, deren Schaubild durch den Punkt $(0 \mid 3)$ geht.

   kubisches Polynom $y = -\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-2)$

*b) Verallgemeinern Sie Ihre Erkenntnis aus dieser Aufgabe.

   zu n gegebenen Nullstellen lässt sich stets ein „passendes“ Polynom vom Grad n konstruieren, das bis auf den Leitkoeffizienten eindeutig ist (die Vorgabe eines zusätzlichen Funktionswerts legt den Leitkoeffizienten fest)

Aufgabe 20: Parabelkoeffizienten aus Scheitel bestimmen

Bestimmen Sie die Parameter a, b und c der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit Scheitelpunkt $(2 \mid 3)$, welche die y-Achse bei $y = 17$ schneidet.

Lösung: $a = \frac{7}{2}$, $b = -14$, $c = 17$

Aufgabe 21: Parabelscheitel aus Nullstellen bestimmen

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ mit den Nullstellen 3 und 5. Leuchtet es ein, dass der Scheitelpunkt von a abhängt?

Lösung: $S = (x_s, y_s) = (4, -a)$; y_s hängt davon ab, wie stark die Parabel geöffnet ist, also von a

Aufgabe 22: Funktionswerte und Nullstellen von Polynomen

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$.

a) Berechnen Sie den Funktionswert an den Stellen $x = -2$ und $x = -1$.

   $p(-2) = 84$, $p(-1) = 0$

b) Geben Sie ein Polynom $q(x)$ an, für das $p(x) = (x-1) \cdot q(x)$ gilt.

   $q(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

*c) Berechnen Sie alle vier Nullstellen und schreiben Sie $p(x)$ als Produkt von Linearfaktoren. Nullstellen: -1, 1, 2, 5 $\Rightarrow p(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-5)$

Aufgabe 23: Gebrochen-rationale Funktionen

Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^2 - x - 6}$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und geben Sie etwaige Nullstellen, Polstellen und Asymptoten an.

Lösung: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$;
Nullstellen bei $x = -3$ und $x = 2$;
Polstelle und senkrechte Asymptote bei $x = -2$, schräge Asymptote $y = x - 1$

Aufgabe 24: Grad und Nullstellen eines Polynoms

a) Wie viele Nullstellen kann ein Grad-n-Polynom höchstens haben? n Nullstellen

b) Wie oft können sich die Graphen eines Grad-4-Polynoms und eines Grad-7-Polynoms höchstens schneiden. 7 mal

Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aufgabe 25: Exponential- versus Potenzfunktion

Betrachtet werden Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^r + s$ mit $r > 0$ und Exponentialfunktionen der Form $g(x) = a^x + b$ mit $a > 1$.

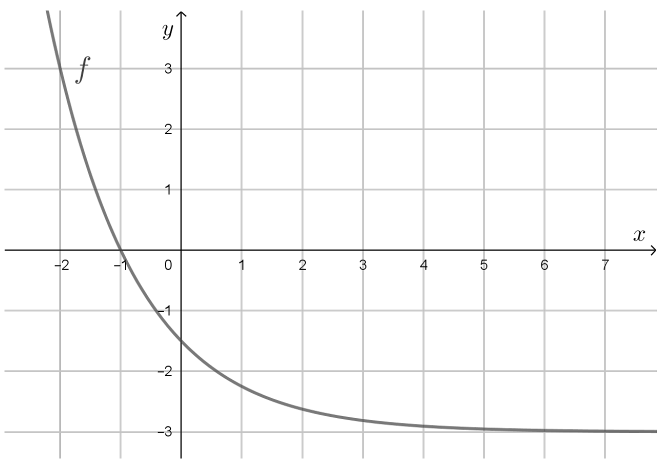
a) Wie sehen die Graphen von f und g für $x \geq 0$ (qualitativ) aus?
Graphen sehen auf den ersten Blick „ähnlich“ aus; g wächst jedoch „viel schneller“

*b) Gibt es eine Funktion vom Typ $f(x)$ und eine Funktion vom Typ $g(x)$, deren Graphen beide die Punkte $A\,(0 \mid 4)$, $B\,(2 \mid 7)$ und $C\,(5 \mid 35)$ enthalten?
Exponentialfunktion ja , nämlich $g(x) = 2^x + 3$; Potenzfunktion nein

***Aufgabe 26:** Exponentialfunktion aus Graph rekonstruieren

Skizziert ist der Graph einer Funktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot b^x + c$. Geben Sie die Werte der Parameter a, b und c an.

Lösung: $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -3$



Aufgabe 27: Radioaktiver Zerfall (e-Funktion und Logarithmus)

Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet $n(t) = n_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$. Die Zahl $n(t)$ gibt die Anzahl der Atome nach t Zeiteinheiten wieder; $n_0 = n(0)$ ist der Bestand an Atomen zur Zeit $t = 0$. Die Zahl $k > 0$ ist die Zerfallskonstante mit der Einheit $\frac{1}{\text{Zeiteinheit}}$.

a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit t_h, nach der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat.
   Nach welcher Zeit, ausgedrückt in Halbwertszeiten, sind von dem radioaktiven Stoff nur noch 25 %, 5 % beziehungsweise 1 % vorhanden? $t_h = \frac{\ln 2}{k}$; 25 % nach 2, 5 % nach gut 4, 1 % nach knapp 7 Halbwertszeiten

*b) Die Tangente an die Kurve von n im Punkt $(0 \mid n_0)$ schneidet die t-Achse im Punkt $(T \mid 0)$. Bestimmen Sie T. Welcher Anteil des Anfangswertes n_0 ist zur Zeit T noch vorhanden? $T = \frac{1}{k}$, $n(T) = n_0 \cdot \mathrm{e}^{-1}$

Trigonometrische Funktionen

Aufgabe 28: Bogenmaß und Gradmaß

a) Geben Sie die Umrechnungsformel zwischen Gradmaß α und Bogenmaß b an (nach Möglichkeit auswendig). $\frac{\alpha}{180°} = \frac{b}{\pi}$

b) Ergänzen Sie die folgende Tabelle (ohne Formelsammlung bzw. Taschenrechner).

Bogenmaß	π	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{10}$	1	$\frac{3\pi}{4}$
Gradmaß	180°	45°	−60°	270°	18°	$\frac{180°}{\pi} \approx$ 57,3°	135°

c) Geben Sie die Bogenmaße $0{,}6\,\pi$ und 2,7 im Gradmaß an (soweit ohne Taschenrechner möglich). $0{,}6\pi = 108°$; $2{,}7 = \frac{2{,}7}{\pi} \cdot 180°$

Aufgabe 29: Beziehung zwischen Winkelfunktionswerten

Der Sinus von 15° ist ungefähr 0,2588. Berechnen Sie daraus ohne Taschenrechner näherungsweise die Werte sin(165°), sin(−15°) und cos(105°).

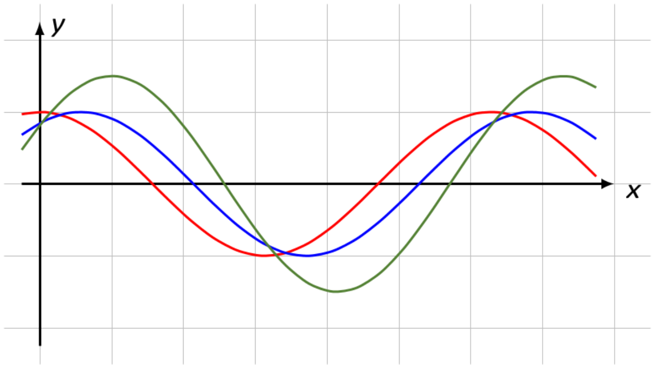
Lösung:

$\sin(165°) = \sin(15°) = 0{,}2588$

$\sin(-15°) = -0{,}2588 = \cos(105°)$

Aufgabe 30: Winkelfunktionen am Graphen erkennen

Ordnen Sie die Funktionen $\cos x$, $\sin(x+1)$ und $\frac{3}{2}\cos(x-1)$ den folgenden Graphen zu und begründen Sie Ihre Entscheidungen.



Lösung:

$\cos x$ = roter Graph (sieht man)

$\sin(x+1) \to$ Sinus um 1 nach links verschoben = blauer Graph

$\frac{3}{2}\cos(x-1) \to$ Cosinus um 1 nach rechts verschoben mit Amplitude $\frac{3}{2}$ = grüner Graph

Aufgabe 31: Auf der Alm

Von der auf 1800 m Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf 1100 m Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten.

Überlegen Sie sich, welche Fragestellungen interessant sein könnten, und berechnen Sie entsprechende Längen mithilfe der Trigonometrie.

Lösung im Kurs

Aufgabe 32: Sinusfunktion (Bildmenge, Nullstellen, Periode)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$.

a) Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich D_f und die Bildmenge B.
   $D_f = \mathbb{R}$; $B = [-2{,}2]$
b) Geben Sie eine Formel an, mit der alle Nullstellen von f berechnet werden können.
   $x = \frac{3k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$
c) Berechnen Sie die Nullstellen auf dem Intervall $[0{,}10]$.
   alle $x = \frac{3k}{2}$ mit $k = 0{,}1{,}\ldots{,}6$
d) Was sind Periode und Kreisfrequenz von f?
   $\omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{\omega} = 3$
e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $x \in [0{,}10]$.
   Lösung im Kurs

Aufgabe 33: Kosinusfunktion (Nullstellen und Extremstellen)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$. Bestimmen Sie

a) alle Nullstellen,

b) alle lokalen Minimalstellen und

c) alle lokalen Maximalstellen von f.

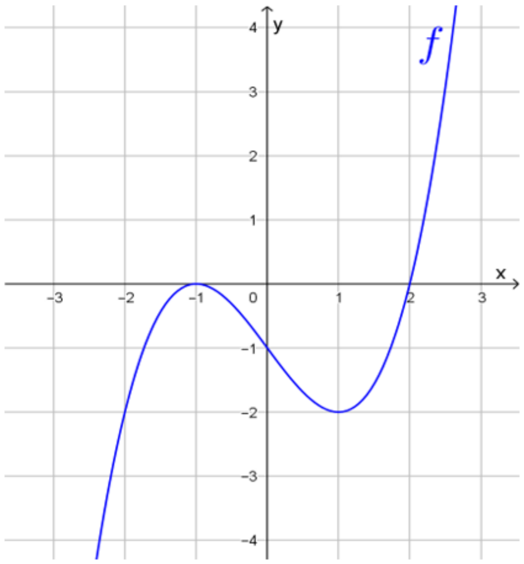
Geben Sie jeweils einen passenden Term zur Beschreibung dieser Stellen an.

Nullstellen bei $x = (2k+1)\pi - 2$, lokale Minimalstellen bei $x = (4k+2)\pi - 2$, lokale Maximalstellen bei $x = 4k\pi - 2$ jeweils mit $k \in \mathbb{Z}$

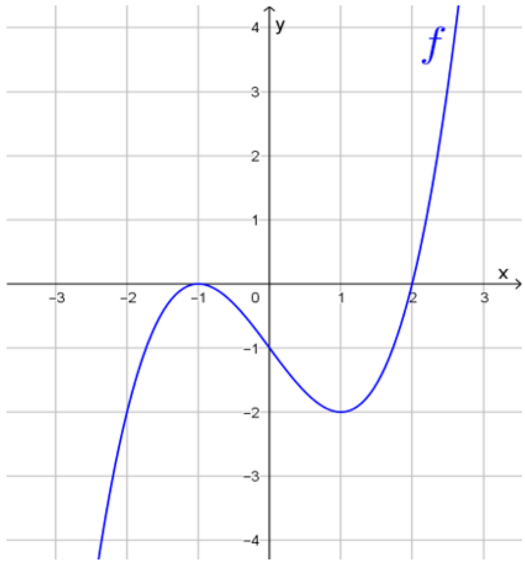
Transformation von Funktionen

Aufgabe 34:

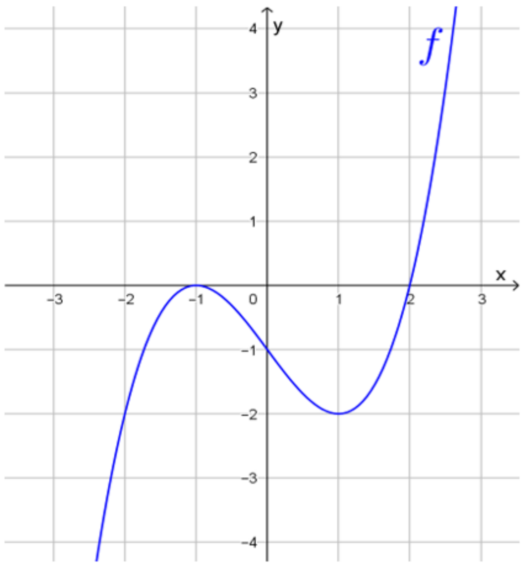
Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Skizzieren Sie jeweils den Graph der unterhalb der Skizze angegebenen „transformierten“ Funktion.



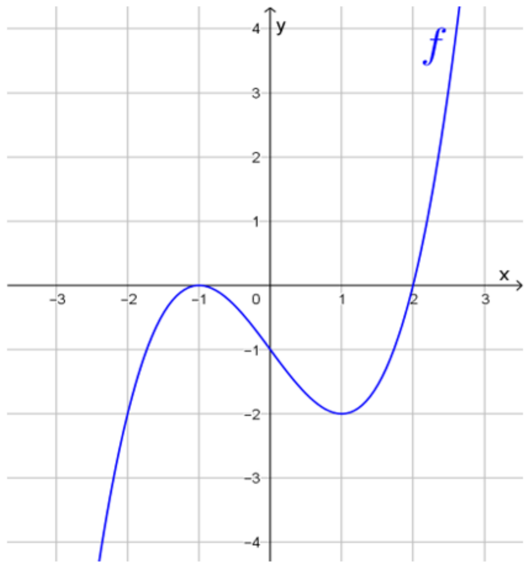
$-f(-x)$



$f(-2x)$



$-2f(x)$



$f(x+1)+1$

Lösungen im Kurs

Aufgabe 35:

Entwickeln Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ durch Transformation aus einer einfachen Grundfunktion.

Lösung: $f(x) = -(x-1)^2 + 3 \rightarrow$ nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel (1,3)

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die Periode P der Funktion f mit $f(x) = -3\cos(2x)$ und geben Sie (ohne Hilfsmittel aus der Differenzialrechnung!) sämtliche Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte auf dem Intervall $0 \leq x < P$ an.

Lösung: $P = \pi$; sowohl Nullstellen als auch Wendepunkte im Intervall $[0,\pi)$ bei $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3\pi}{4}$, einziger HP im Intervall $[0,\pi)$ bei $x = \frac{\pi}{2}$, einziger TP bei $x = 0$

Aufgabe 37:

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $y = \sin x$

b) $y = 2\sin x$

c) $y = 2 + \sin x$

d) $y = \sin(2x)$

e) $y = \sin(x + 2)$

f) $y = 2\sin(x + 2) + 2$

g) $y = -\sin x$

h) $y = \sin(-x)$

i) $y = -\sin(-x)$

Lösungen im Kurs

Zusammengesetzte Funktionen

Aufgabe 38: Neue Funktionen durch Addition, Multiplikation und Verkettung

Gegeben seien die Funktionen $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ und $f_3(x) = \sqrt{x}$.
Bestimmen Sie die Funktionen g, h und k mit:

- $g(x) = f_3(f_1(x) + f_2(x))$ $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $D_g = \mathbb{R}$
- $h(x) = f_3(f_1(x)) + f_2(x)$ $h(x) = |x| + 1$, $D_h = \mathbb{R}$
- $k(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x))$ $k(x) = 1 + x + 2\sqrt{x}$, $D_k = \mathbb{R}_0^+$

Vereinfachen Sie dabei die Funktionsterme so weit wie möglich. Was sind die Definitionsbereiche von g, h, k?

Aufgabe 39: Reihenfolge bei Funktionsverkettung

Verketten Sie die Funktionen f und g jeweils in beiden möglichen Reihenfolgen. Die Definitionsbereiche der Funktionen können als geeignet angenommen werden.

a) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$

b) $f(x) = 4x^3$, $g(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{3}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$, $g(x) = 16x^4$

Lösungen im Kurs

Aufgabe 40: Graphen (einfacher) nicht-elementarer Funktionen

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = |\sin x|$ Lösung: die Sinusbögen unterhalb der x-Achse werden „nach oben geklappt“

b) $g(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{\sin x}$
Tipp: ist $g(x)$ periodisch, bzw. besitzt $g(x)$ Maxima/Minima?, Lösung im Kurs

Aufgabe 41: Definitionsbereiche zusammengesetzter Funktionen

Geben Sie die Definitionsbereiche folgender Funktionen an:

a) $\varphi(t) = \cos(\sin(t))$

b) $g(x) = \frac{2x^3}{a^2 - x^2}$

c) $u(t) = \frac{(3t+5)^{10}}{5t+1} - \ln\left(\frac{1}{t} + \sqrt{t}\right)$

d) $f(x) = \sin(x \cdot \ln x)$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{2x+3} \cdot (2x+3)$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$

h) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x + \sqrt{x^2+1}}\right)$

Lösungen im Kurs

Aufgabe 42: Nullstellen zusammengesetzter sin-/cos-Funktionen

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(x) = \sin(x^2)\cos(3x + \frac{\pi}{4})$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$.
Tipp: ein Produkt ist dann Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist
Lösung: $x = \sqrt{k\pi}$ mit $4 \leq k \leq 12$ sowie $x = \frac{4k+1}{12}\pi$ mit $3 \leq k \leq 5$

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin(2x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.
Tipp: drücken Sie $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ durch den Cosinus aus und verwenden Sie $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
Lösung: $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

Gemischte Aufgaben

Aufgabe 43: Modellierung „Bremsen“

Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt $20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit und zeichnen Sie den Graphen.
Lösung: $v(t) = v_0 + a \cdot t = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t$

Aufgabe 44: Modellierung „Tagestemperatur“

Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16 Uhr nachmittags ist die Temperatur mit 25 °C am höchsten. Nachts um 4 Uhr ist es mit 3 °C am kältesten.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst Periode, Amplitude und „Verschiebung“ der gesuchten Sinusfunktion.

Lösung: Temperatur $T(u)$ zur Zeit u gegeben durch $T(u) = 11\,{}^\circ\mathrm{C} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}}(u - 10\,\mathrm{h})\right) + 14\,{}^\circ\mathrm{C}$ (h = Stunden)

Aufgabe 45:

Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen:

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = -2x + 1$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

d) $f(x) = \sqrt{|x|}$

e) $f(x) = -\sin(-x)$

f) $f(x) = \log_{0,5} x$

g) $f(x) = x + |x|$

h) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

i) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2x}$

j) $f(x) = \sqrt[30]{x}$

k) $f(x) = 2\cos(2x) - 2$

l) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2x)$

Lösungen im Kurs

Aufgabe 46: Elementare Eigenschaften von Funktionen

Richtig oder falsch?

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ ist symmetrisch zur y-Achse. falsch

b) Der (maximale) Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ist $\mathbb{R}$. falsch

c) Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ist streng monoton wachsend. richtig

d) $x = 5$ ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$. falsch

e) Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist nach oben beschränkt. falsch

f) Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ ist beschränkt. richtig

g) Die Umkehrfunktion von $f(x) = x - 1$ lautet $f^{-1}(x) = x + 1$. richtig

h) Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2-x-1}$ ist $\mathbb{R}$.
falsch (Nenner hat Nullstellen)

i) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{(x^{-1})}$ ist monoton.
falsch (streng monoton fallend auf $\mathbb{R}^-$ und $\mathbb{R}^+$; <u>nicht</u> monoton auf ganz $D = \mathbb{R}^*$)

j) Die Periode der Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ist 4. richtig

Aufgabe 47: Zu gegebenen Bedingungen eine Funktion gegebenen Typs bestimmen

a) Bestimmen Sie die Funktion f mit $f(x) = a^x$, $a > 0$, deren Graph durch den Punkt $P(2 \mid 49)$ geht. $f(x) = 7^x$

*b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grads ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet die y-Achse 2 Einheiten oberhalb des Ursprungs und hat den Hochpunkt $H(1 \mid 3)$. Bestimmen Sie die Funktion f. $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 2$

Übungsblatt 5: Differentialrechnung

Aufgabe 1:

Berechnen Sie durch geeignete Umformungen (ohne l'Hospital) die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2\,(x^2-1)} = \frac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2\,x^2-8}{x^3+8} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\tan x} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2\,\mathrm{e}^{x}-2} = 1$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = 2\,x^3 - 1$ an der Stelle $x_0 = 1$ direkt mit Hilfe des Differentialquotienten, und geben Sie die Gleichung der Tangente von $f(x)$ bei x_0 an! *Anleitung:* Vereinfachen Sie den Differenzenquotienten mit der binomischen Formel für $(a+b)^3$ und bestimmen Sie dann den Grenzwert für $\Delta x \to 0$.

Ableitung: $f'(1) = 6$, Tangente: $y = 6\,(x-1)+1$

Aufgabe 3: (Ableitungen)

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente zu $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$ an der Stelle $x_0 = 1{,}2$. Welche geometrische Figur wird durch diese Funktion beschrieben?
Ableitung $f'(1{,}2) = -0{,}75$, Tangente $y = 1{,}6 - 0{,}75 \cdot (x - 1{,}2)$; Halbkreis mit $r = 2$

b) Überprüfen Sie durch Rechnung

$$f(x) = e^{-x}\sin^2 x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^{-x}\left(\sin 2x - \sin^2 x\right)$$

c) Bestimmen Sie die Ableitungen der sog. „hyperbolischen Funktionen“

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

und geben Sie die Ableitungen wieder als Hyperbelfunktionen an!
$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich!

a) $P(x) = \frac{1}{3}\,x^6 - 2\,x^4 + 4\,x^2 \quad \Longrightarrow \quad P'(x) = 2\,x^5 - 8\,x^3 + 8\,x$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 3\sin x + 5\,\mathrm{e}^{-x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} - 3\cos x - 5\,\mathrm{e}^{-x}$

c) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$

d) $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

e) $g(x) = x\,(\ln x - 1) \quad \Longrightarrow \quad g'(x) = \ln x$

f) $f(x) = \dfrac{C \cdot \cos x}{1 - \sin x}$ (C beliebige Konstante) $\quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{C}{1-\sin x}$

g) $f(x) = (1 - x) \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = (1 - 2\,x)e^{2x}$

h) $R(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad R'(x) = \frac{2\,x}{(x+1)^3}$

i) $f(t) = 2\cos^2 \frac{t}{2} \quad \Longrightarrow \quad f'(t) = -\sin t$

* j) $f(x) = -\ln|\cos x| \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \tan x$

Hinweis zu g):
Beseitigen Sie den Betrag mit einer Fallunterscheidung ($\cos x > 0$ und $\cos x < 0$)!

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = 4\,x - x^2 - 2\ln x - 1, \quad x \in \,]0, \infty[$$

streng monoton fallend auf dem gesamten Definitionsbereich ist.
Lösung im Kurs

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{3\,x + 2\,x^2}{\mathrm{e}^x} - 1, \quad x \in [0, 4]$$

a) Zeigen Sie: $f'(x) = (3 + x - 2\,x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$

b) Bestimmen Sie die Monotoniebereiche von f.
f ist in $[0, \frac{3}{2}]$ sms und in $[\frac{3}{2}, 4]$ smf

c) Ermitteln Sie den größten und den kleinsten Funktionswert von f.
Minimalwert $f(0) = -1$, Maximalwert $f(1{,}5) = \frac{9}{e^{1,5}} - 1 = 1{,}008\ldots$

d) Begründen Sie kurz, dass f in $[0, 4]$ genau zwei Nullstellen besitzt!
f hat in jedem Monotoniebereich einen Vorzeichenwechsel

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Monotoniebereiche der Funktion

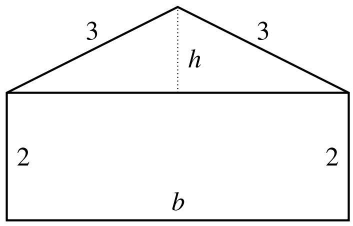
$$f(x) = 2\sin x + \sin 2x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

und geben Sie die lokalen Extremstellen von f an!
f ist sms in $[0, \frac{\pi}{3}]$, smf in $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ und wieder sms in $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$
Lokale Extremstellen: 0 (Min), $\frac{\pi}{3}$ (Max), $\frac{5\pi}{3}$ (Min), 2π (Max); $x = \pi$ ist Terassenpunkt!

Aufgabe 8:

Ein Geräteschuppen mit Fassadenhöhe 2 m und Sparrenlänge 3 m soll gemäß dem Querschnitt in der Abbildung so gebaut werden, dass sein Volumen maximal groß wird. Berechnen Sie die Gesamtbreite b und die Dachhöhe h des Schuppens!

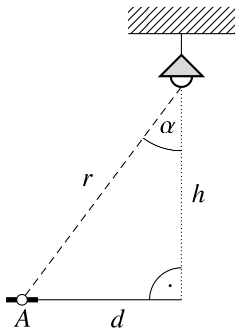
$h = \sqrt{5{,}5} - 1 \approx 1{,}345\,\mathrm{m}$ und $b = 2\sqrt{9 - h^2} \approx 5{,}363\,\mathrm{m}$



Der Schuppen soll maximales Volumen haben!

Aufgabe 9:

In der Abbildung ist an der Decke eine höhenverstellbare Lampe mit der in allen Richtungen konstanten Lichtstärke I angebracht. Die Beleuchtungsstärke bei einer kleinen horizontalen Empfangsfläche im Punkt A lässt sich mit dem sog. *photometrischen Entfernungsgesetz* $E = I \cdot \frac{\cos\alpha}{r^2}$ berechnen, wobei α der Einfallwinkel und r der Abstand von A zur (nahezu punktförmigen) Lichtquelle ist. Geben Sie die Beleuchtungsstärke E in Abhängigkeit von der Höhe h der Lampe an, und bestimmen Sie h so, dass die Beleuchtungsstärke im Punkt A maximal wird!



Die Beleuchtung in A soll maximal groß sein!